Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 8
15.11.2016

1. Laske integraalit $\int_\gamma \cos(\pi z)\, dz$ ja $\int_\gamma \frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}\, dz$, kun $\gamma(t) = \frac{(1+t^3)e^{2\pi i t^5}}{1+3t^2}$, $0 \le t \le 1$.

Ratkaisu:

Käytetään integraalifunktioita. Huomataan ensin, että $F(z) = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}$ on analyyttinen koko tasossa ja että sen derivaatta on $\cos(\pi z)$. Täten $F(z)$ on $\cos(\pi z)$:n integraalifunktio ja pätee

$$\int_\gamma \cos(\pi z)\, dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\pi}\sin(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

Toista integraalia varten huomaamme, että $G(z) = -\frac{7}{2z^2} - \frac{1}{3z}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja tässä alueessa sen derivaatta on $\frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}$. Siis $G(z)$ on tässä alueessa funktion $\frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}$ integraalifunktio, ks esimerkki 7.11. Nyt koska $\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kaikilla $t \in [0,1]$ pätee että

$$\int_\gamma \frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}\, dz = G(\gamma(1)) - G(\gamma(0)) = -14 - \frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{1}{3} = -\frac{65}{6}.$$

2. Määrää integraali $\int_\gamma |z| z\, dz$, kun γ on umpinainen polku, joka on yhdiste polkujanoista $[0,1]$ ja $[i,0]$ sekä yksikköympyrän kaaresta, joka kulkee pisteestä 1 pisteeseen i. Polku γ kierretään positiiviseen suuntaan.

[Vihje: Piirrä kuva]

Ratkaisu:

Lasketaan integraali kolmen integraalin summana. Lasketaan ensin integraali yli janan $[0,1]$ ja parametrisoidaan $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0,1]$. Tällöin

$$\int_{\gamma_1} |z|z \, dz = \int_0^1 |t|t \, dt = \int_0^1 \left(\frac{t^3}{3}\right)' \, dt = \frac{1}{3}$$

.

Lasketaan seuraavaksi integraali yli ympyräkaaren. Parametrisoidaan $\gamma_2(t) = e^{it\frac{\pi}{2}}$ ja lasketaan

$$\int_{\gamma_2} |z|z \, dz = \int_0^1 \mid e^{it\frac{\pi}{2}} \mid e^{it\frac{\pi}{2}} \frac{i\pi}{2} e^{it\frac{\pi}{2}} \, dt = \int_0^1 \frac{i\pi}{2} e^{it\pi} \, dt = \int_0^1 \left(\frac{e^{it\pi}}{2}\right)'.$$

Tästä saadaan sijoittamalla

$$\int_{\gamma_2} |z|z \, dz = \frac{e^{i\pi}}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Lasketaan lopuksi vielä integraali yli viimeisen janan. Lasketaan nyt integraali yli janan $[0,i]$ ja huomioidaan tämä integraalin merkissä. Parametrisoidaan siis $\gamma_3(t) = it$. Nyt

$$\int_{\gamma_3} |z|z \, dz = -\int_0^1 \mid t \mid iti \, dt = \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{1}{3}.$$

Siis lopullinen integraali saadaan näiden summana, eli

$$\int_{\gamma} |z|z \, dz = \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}.$$

3. Onko edellisen tehtävän funktiolla $f(z) = |z|z$ integraalifunktiota tasossa ? Perustele vastauksesi.

Ratkaisu: Lause 7.14 nojalla alueessa Ω jatkuvalla kuvauksella on integraalifunktio jos ja vain jos sen integraali yli jokaisen umpinaisen paloittain C^1 polun yli on nolla. Edellisen tehtävän nojalla nähdään, että näin ei tasossa ole ja täten kyseisellä kuvauksella ei ole integraalifunktiota kompleksitasossa.

4. Olkoot $|\eta| = 1$ ja $|a| < 1$ kompleksisia vakioita. Osoita että Möbiuskuvaus

$$\varphi(z) = \eta \frac{z+a}{1+\overline{a}\,z}$$

kuvaa yksikkökiekon $\mathbb{D}$ itselleen.
[Vihje: Tarkasta ensin minne yksikköympyrä kuvautuu.]

Ratkaisu: Osoitetaan, että $\frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ kuvaa yksikköympyrän pisteet yksikköympyrälle, sillä selvästi tällöin myös φ kuvaa yksikköympyrän pisteet yksikköympyrälle (Koska $\mid \eta \mid = 1$ η:lla kertominen vastaa vain kiertoa origon ympäri, joka selvästi kuvaa yksikköympyrän itselleen).

Koska kyseessä on möbius kuvaus riittää löytää kolme pistettä yksikköympyrältä joille pätee että ne kuvautuvat yksikköympyrälle.

Valitaan pisteet $1, -1, i$ ja merkitään $a = x + iy$. Huomataan, että

$$\frac{\mid 1+a \mid}{\mid 1+\bar{a} \mid} = \frac{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}{\sqrt{(1+x)^+(-y)^2}} = 1.$$

Siis piste 1 kuvautuu yksikköympyrälle. Näytetään seuraavaksi sama pisteelle -1. Nyt $\frac{|-1+a|}{|1-\bar{a}|} = \frac{\sqrt{(-1+x)^2+y^2}}{\sqrt{(1-x)^2+y^2}} = 1$.

Viimeiseksi osoitetaan sama pisteelle $-i$. Nyt $\frac{|i+a|}{|1+\bar{a}i|} = \frac{|i+x+iy|}{|1+ix+y|} = 1$. Siis yksikköympyrä kuvautuu yksikköympyrälle.

Nyt huomataan, että $f(-a) = 0$. Koska $\mid a \mid < 1$ löydettiin piste yksikkökiekosta joka kuvautuu origoon. Siis annettua muotoa oleva kuvaus kuvaa yksikkökiekon itselleen.

5. a) Osoita, että jokainen edellisen tehtävän Möbiuskuvaus toteuttaa yhtälön

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}\,, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

b) Yksikkökiekolle $\mathbb{D}$ voidaan antaa nk. *hyperbolinen metriikka* asettamalla, että kiekon C^1-polkujen γ pituus (hyperbolisessa metriikassa) saadaan kaavasta

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz|.$$

Osoita, että jokainen yo. Möbiuskuvaus säilyttää polkujen hyperbolisen pituuden, $\ell_{hyp}(\varphi\circ\gamma) = \ell_{hyp}(\gamma)$. Toisin sanoen, φ on isometria hyperbolisen metriikan suhteen !

Ratkaisu: a: Lasketaan ensin

$$\varphi'(z) = \eta\frac{(1+\bar{a}z) - \bar{a}(z+a)}{(1+\bar{a}z)^2} = \eta\frac{1-|a|^2}{(1+\bar{a}z)^2}.$$

Tämän avulla lasketaan

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{\frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}z|^2}}{1-\frac{|z+a|^2}{|1+\bar{a}z|^2}} = \frac{1-|a|^2}{|1+\bar{a}z|^2 - |z+a|^2}.$$

Haluttu yhtälö on ekvivalentti yhtälön

$$(1-|a|^2)(1-|z|^2) = |1+\bar{a}z|^2 - |z+a|^2$$

kanssa. Mutta nyt huomataan

$$|1+\bar{a}z|^2 - |z+a|^2 = (1+\bar{a}z)(1+a\bar{z}) - (z+a)(\bar{z}+\bar{a}) = 1 - |z|^2 - |a|^2 + |az|^2,$$

mikä todistaa yhtälön.

b: Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{D}$ mielivaltainen C^1-polku. Lasketaan nyt käyttäen integraalin määritelmää ensin oikea puoli yhtälöstä

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz| = \int_a^b \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2}|\gamma'(t)|dt.$$

Vastaavasti vasemmalle puolelle lasketaan

$$\ell_{hyp}(\varphi\circ\gamma) = \int_{\varphi\circ\gamma} \frac{1}{1-|z|^2}|dz| = \int_a^b \frac{1}{1-|\varphi(\gamma(t))|^2}|\varphi'(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt.$$

Nyt a kohdan nojalla

$$\frac{1}{1-|\varphi(\gamma(t))|^2}|\varphi'(\gamma(t))| = \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2},$$

jonka avulla saadaan

$$\ell_{hyp}(\varphi\circ\gamma) = \int_a^b \frac{1}{1-|\gamma(t)|^2}|\gamma'(t)|dt,$$

mikä osoittaa väitteen.