Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 8
15.11.2016

1. Laske integraalit $\int_\gamma \cos(\pi z)\, dz$ ja $\int_\gamma \frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}\, dz$, kun $\gamma(t) = \frac{(1+t^3)e^{2\pi i t^5}}{1+3t^2}$, $0 \le t \le 1$.

2. Määrää integraali $\int_\gamma |z|z\, dz$, kun γ on umpinainen polku, joka on yhdiste polkujanoista $[0,1]$ ja $[i,0]$ sekä yksikköympyrän kaaresta, joka kulkee pisteestä 1 pisteeseen i. Polku γ kierretään positiiviseen suuntaan.

[Vihje: Piirrä kuva]

3. Onko edellisen tehtävän funktiolla $f(z) = |z|z$ integraalifunktiota tasossa ? Perustele vastauksesi.

4. Olkoot $|\eta| = 1$ ja $|a| < 1$ kompleksisia vakioita. Osoita että Möbiuskuvaus

$$\varphi(z) = \eta \frac{z+a}{1+\bar{a}\, z}$$

kuvaa yksikkökiekon $\mathbb{D}$ itselleen.
[Vihje: Tarkasta ensin minne yksikköympyrä kuvautuu.]

5. a) Osoita, että jokainen edellisen tehtävän Möbiuskuvaus toteuttaa yhtälön

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}\,, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

b) Yksikkökiekolle $\mathbb{D}$ voidaan antaa nk. *hyperbolinen metriikka* asettamalla, että kiekon C^1-polkujen γ pituus (hyperbolisessa metriikassa) saadaan kaavasta

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz|.$$

Osoita, että jokainen yo. Möbiuskuvaus säilyttää polkujen hyperbolisen pituuden, $\ell_{hyp}(\varphi \circ \gamma) = \ell_{hyp}(\gamma)$. Toisin sanoen, φ on isometria hyperbolisen metriikan suhteen !

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 8
15.11.2016

1. Determine the integrals $\int_\gamma \cos(\pi z)\, dz$ and $\int_\gamma \frac{7}{z^3} + \frac{1}{3z^2}\, dz$, when $\gamma(t) = \frac{(1+t^3)e^{2\pi i t^5}}{1+3t^2}$, $0 \le t \le 1$.

2. Determine the integral $\int_\gamma |z| z\, dz$, when γ is a closed path, the union of interval paths $[0,1]$ and $[i,0]$ together with the arc of unit circle going from the point 1 to the point i. (γ has the positive direction.)

[Hint: Draw the picture]

3. Does the function $f(z) = |z|z$ from the previous problem have an integral function in $\mathbb{C}$? Justify your answer.

4. Suppose $|\eta| = 1$ and $|a| < 1$ are complex constants. Show that the Möbius transform

$$\varphi(z) = \eta \frac{z+a}{1+\bar{a}\, z}$$

maps the unit disc $\mathbb{D}$ onto itself.
[Hint: Check first the image of the unit circle.]

5. a) Show that every Möbius transform from the previous problem satisfies

$$\frac{|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}, \qquad z \in \mathbb{D}.$$

b) One can give to the unit disc $\mathbb{D}$ the so called *hyperbolic metric*, by requiring that the hyperbolic length of a C^1-path γ in the unit disc is given by

$$\ell_{hyp}(\gamma) = \int_\gamma \frac{1}{1-|z|^2}|dz|.$$

Show that the above Möbius φ preserves the hyperbolic length, $\ell_{hyp}(\varphi \circ \gamma) = \ell_{hyp}(\gamma)$. That is, φ is an isometry in the hyperbolic metric !