Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 7
8.11.2016

1. Laske integraali $\int_\gamma |z|\, dz$, kun

   a) $\gamma = [-1, 1]$, eli jana pisteestä -1 pisteeseen 1.

   b) γ on yksikköympyrän kaari ylemmässä puolitasossa pisteestä -1 pisteeseen 1.

Ratkaisu: a: Nyt kyseessä on integraali yli reaalisen välin, ja lisäksi huomataan että funktio saa vain reaalisia arvoja. Lisäksi tiedetään että reaaliakselilla $\mid z \mid = \mid \mathrm{Re}(z) \mid$. Täten saadaan

$$\int_{-1}^{1} \mid z \mid dz = 2 \int_0^1 t\, dt = 1.$$

b: Nyt käytetään polkuintegraalin määritelmää. Parametrisoidaan polku seuraavasti, $\gamma(t) = e^{\pi i - \pi i t}$, missä $t \in [0, 1]$. Tällöin $\gamma'(t) = -\pi i e^{\pi i - \pi i t}$ ja integraali voidaan laskea seuraavasti,

$$\int_\gamma |z|\, dz = \int_0^1 \mid e^{\pi i - \pi i t} \mid \cdot (-\pi i e^{\pi i - \pi i t})\, dt = \int_0^1 -\pi i e^{\pi i - \pi i t}\, dt = \int_0^1 \left(\frac{-\pi i}{-\pi i} e^{\pi i - \pi i t} \right)'\, dt$$

Ja nyt sijoittamalla saadaan

$$\int_\gamma |z|\, dz = 1 - e^{\pi i} = 2.$$

2. Etsi Möbiuskuvaus f, jolle $f(i) = 0$, $f(1) = \infty$ ja $f(-1) = 1$. Mikä on yksikkökiekon $D(0, 1)$ kuva tässä Möbiuskuvauksessa.

Ratkaisu: Lauseen 6.29 nojalla tulee laskea yhtälö

$$(w, 0, \infty, 1) = (z, i, 1, -1).$$

Tätä varten lasketaan
$$(w, 0, \infty, 1) = \frac{-1}{w-1}$$
ja
$$(z, i, 1, -1) = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)}.$$
Saadaan siis yhtälö
$$\frac{-1}{w-1} = \frac{(z-1)(i+1)}{(z+1)(i-1)},$$
josta saadaan ratkaisuksi
$$f(z) = \frac{2z-2i}{(1+i)z-(1+i)}.$$

Kuvausehdoista nähdään, että yksikköympyrä kuvautuu reaaliakselille. Tällöin yksikkökiekko kuvautuu joko ylemmälle tai alemmalle puolitasolle. Kokeilemalla kuinka origo kuvautuu
$$f(0) = \frac{-2i}{-1-i} = 1+i$$
huomataan, että yksikkökiekko kuvautuu ylemmälle puolitasolle.

Tehtävän voi myös tehdä ilman kaksoissuhdetta, jolloin ehdoista $f(i) = 0$ ja $f(1) = \infty$ päätellään, että kuvaus on muotoa
$$f(z) = h\frac{z-i}{z-1}. \tag{1}$$
Tämän jälkeen ehdon $f(-1) = 1$ avulla lasketaan $h = \frac{2}{1+i}$. Yleisessä tapauksessa ratkaisun löytää aina käyttäen kaksoissuhdetta, kun taas kuvauksen arvaaminen ehdoista voi mennä hyvinkin vaikeaksi.

3. Tutki mille joukoille möbius-kuvaus
$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$
kuvaa seuraavat joukot: a) imaginääriakseli, b) oikea puolitaso $\{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, c) yksikköympyrä, d) yksikkökiekko $D(0,1)$, e) $\{z : 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$. Piirrä kuvat.

Ratkaisu: Muistetaan että Möbius kuvaus kuvaa Möbius ympyrät Möbius ympyröiksi.

a: Lasketaan ensin $f(0) = \infty$, $f(i) = \frac{i+1}{i} = 1 - i$ ja $f(-i) = 1 + i$. Tästä nähdään, että imaginääriakseli kuvautuu suoralle joka on kohtisuorassa reaaliakselia kohti ja kulkee pisteen 1 kautta.

b: Oikea puolitaso selvästi kuvautuu jommallekummalle puolelle edellistä suoraa ja oikean puolen löytämiseksi riittää kuvata yksi testipiste ja katsoa kummalle puolelle päädytään. Lasketaan siis $f(\frac{1}{2}) = 2$, joten oikea puolitaso kuvautuu joukolle $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

c: Lasketaan jälleen kolmen helpon pisteen kuvat yksikköympyrältä, $f(1) = 2$, $f(i) = 1-i$ ja $f(-i) = 1+i$. Nähdään että pisteet ovat ympyrällä $S(1,1)$, joten tämä on kysytty kuvajoukko.

d: Jälleen riittää etsiä yhden testipisteen kuva, lasketaan $f(0) = \infty$, joten kuvautuu alueelle $\mathbb{C} \setminus \overline{B(1,1)}$.

e: Muistetaan että Möbius kuvaus on bijektio $\bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$, joten halutun alueen kuva voidaan laskea leikkauksena ylemmän puolitason ja oikean puolitason kuvista. Laskimme ylä että oikea puolitaso kuvautuu alueelle $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$. Lasketaan siis seuraavaksi ylemmän puolitason kuva.

Tätä varten tutkitaan minne reaaliakseli kuvautuu, valitaan jälleen kolme pistettä $f(0) = \infty$, $f(1) = 2$ ja $f(-1) = 0$. Nähdään, että reaaliakseli kuvautuu itselleen. Yllä laskettu että $f(i) = 1 - i$, joten ylempi puolitaso kuvautuu alemmaksi puolitasoksi.

Nyt siis sektorin kuvaksi saadaan alemman puolitason ja alueen $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1\}$ leikkaus, eli alue $\{z : \mathrm{Re}(z) > 1,\ \mathrm{Im}(z) < 0\}$.

4. Yksinkertaisia Möbius-kuvauksia ovat esimerkiksi

- $z \mapsto z + a$, jossa $a \in \mathbb{C}$ (yhdensuuntaissiirto)
- $z \mapsto az$, jossa $a \neq 0$ (kierto + venytys)
- $z \mapsto 1/z$ (inversio)

Osoita, että jokainen Möbius-kuvaus $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ voidaan esittää yhdisteenä tällaisista kuvauksista.

Ratkaisu: Tutkitaan ensin tapaus $c = 0$. Tällöin kuvaus on muotoa $\frac{az+b}{d}$,

missä nyt $ad \neq 0$. Helposti nähdään, että kyseinen kuvaus on yhdistetty kuvaus kuvauksista $z \to \frac{az}{d}$ ja $z \to z + \frac{b}{d}$.

Tutkitaan nyt tapaus $c \neq 0$. Tällöin möbius kuvaus on muotoa $\frac{az+b}{cz+d}$, missä $ad - bc \neq 0$. Osoitetaan nyt että annetuista kuvauksista voidaan rakentaa mielivaltainen annettu Möbius kuvaus. Valitaan kuvaukset

1. $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$
2. $f_2(z) = \frac{1}{z}$
3. $f_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2} z$
4. $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$

Osoitetaan nyt, että $\frac{az+b}{cz+d} = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$. Lasketaan suoraan

$$
\begin{aligned}
f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z) &= f_4 \circ f_3 \circ f_2 \left(z + \frac{d}{c} \right) = f_4 \circ f_3 \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) \\
&= f_4 \left(\frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) = \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.
\end{aligned}
$$

Sievennetään seuraavaksi tämä lauseke,

$$
\frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad}{c^2 z + dc} + \frac{a}{c} = \frac{bc - ad + a(cz + d)}{c^2 z + dc} = \frac{az + b}{cz + d}
$$

kuten haluttiin. Siis väite pätee, sillä mielivaltainen Möbius kuvaus voidaan muodosta yhdistämällä annettuja kolmea kuvausta.

5. Määrää integraali $\int_\gamma z \operatorname{Im} z \; dz$, kun γ on positiivisesti (vastapäivään) suunnistettu kolmion kehä, ja kolmion kärkipisteet ovat 0, 3 ja $3 + 4i$.

[Vihje: Luennot $\Rightarrow$ voit esittää γ:n kolmen polun tulona ja valita sopivat parametrisoinnit. Miten lasketaan integraalit yli tulopolkujen ?]

Ratkaisu: Esitetään γ kolmen polun yhdisteenä, joista jokainen polku on kolmion sivu. Olkoon γ_1 sivu pisteestä 0 pisteeseen 3, γ_2 on sivu pisteestä 3 pisteeseen $3+4i$ ja lopulta γ_3 on sivu pisteestä $3+4i$ pisteeseen 0. Tällöin

$$\int_\gamma z\mathrm{Im}(z)\,dz = \sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} z\mathrm{Im}(z)\,dz.$$

Lasketaan nyt siis nämä integraalit. Ensinnäkin huomataan että funktio on identtisesti nolla reaaliakselilla, joten $\int_{\gamma_1} z\mathrm{Im}(z)\,dz = 0$.

Lasketaan nyt γ_2:sta vastaava integraali. Nyt voidaan parametrisoida $\gamma_2(t) = 3+4it$. Tällöin

$$\int_{\gamma_2} z\mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 (3{+}4it)4t4i\,dt = \int_0^1 48it{-}64t^2\,dt = \int_0^1 \left((24it^2-\frac{64}{3}t^3\right)',$$

josta sijoittamalla saadaan $\int_{\gamma_2} z\mathrm{Im}(z)\,dz = 24i-\frac{64}{3}$.

Viimeisenä lasketaan vielä γ_3 integraali. Nyt parametrisoidaan $\gamma_3(t) = 3+4i-t(3+4i)$. Tällöin saadaan

$$\int_{\gamma_3} z\mathrm{Im}(z)\,dz = \int_0^1 (3{+}4i{-}t(3{+}4i))(4{-}4t)(-3{-}4i)\,dt = -4(3{+}4i)^2\int_0^1 (1{-}t)^2\,dt =$$

$$-4(3+4i)^2\int_0^1 1-2t+t^2\,dt = -4(3+4i)^2\int_0^1 \left(t-t^2+\frac{1}{3}t^3\right)'$$

Ja nyt sijoittamalla saadaan

$$\int_{\gamma_3} z\mathrm{Im}(z)\,dz = -4(3+4i)^2(\frac{1}{3}) = \frac{28}{3}-32i.$$

Tällöin lopullinen integraali saadaan summaamalla nämä, eli

$$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,z\,dz = 24i-\frac{64}{3}+\frac{28}{3}-32i = -8i-12.$$