

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 7
8.11.2016

1. Laske integraali $\int_{\gamma} |z| dz$, kun

- a) $\gamma = [-1, 1]$, eli jana pisteestä -1 pisteeseen 1 .
- b) γ on yksikköympyrän kaari ylemmässä puolitasossa pisteestä -1 pisteeseen 1 .

2. Etsi Möbiuskuvaus f , jolle $f(i) = 0$, $f(1) = \infty$ ja $f(-1) = 1$. Mikä on yksikkökiekkon $D(0, 1)$ kuva tässä Möbiuskuvauksessa.

3. Tutki mille joukoille möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$

kuvaa seuraavat joukot: a) imaginääriakseli, b) oikea puolitaso $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, c) yksikköympyrä, d) yksikkökiekkon $D(0, 1)$, e) $\{z : 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$. Piirrä kuvat.

4. Yksinkertaisia Möbius-kuvauksia ovat esimerkiksi

- $z \mapsto z + a$, jossa $a \in \mathbb{C}$ (yhdensuuntaissiirto)
- $z \mapsto az$, jossa $a \neq 0$ (kierto + venytys)
- $z \mapsto 1/z$ (inversio)

Osoita, että jokainen Möbius-kuvaus $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ voidaan esittää yhdisteenä tällaisista kuvauksista.

5. Määrä integraali $\int_{\gamma} z \operatorname{Im} z dz$, kun γ on positiivisesti (vastapäivään) suunnistettu kolmion kehä, ja kolmion kärkipisteet ovat 0 , 3 ja $3 + 4i$.

[Vihje: Luennot \Rightarrow voit esittää γ :n kolmen polun tulona ja valita sopivat parametrisoinnit. Miten lasketaan integraalit yli tulopolkujen ?]

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 7
8.11.2016

1. Determine the integral $\int_{\gamma} |z| dz$, when
 - a) $\gamma = [-1, 1]$, i.e. a segment from the point -1 to the point 1 .
 - b) γ is an arc of the unit circle in the upper half plane, from the point -1 to the point 1 .
2. Find a Möbius transform f , for which $f(i) = 0$, $f(1) = \infty$ and $f(-1) = 1$. What is the image of the unit disc $D(0, 1)$ under this Möbius transform ?
3. Determine what is the image under the Möbius transform

$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$

of the following sets: a) imaginary axis, b) right half plane $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, c) the unit circle, d) the unit disc $D(0, 1)$, e) $\{z : 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$. Sketch a picture of the images.

4. Simple Möbius transforms are e.g.
 - $z \mapsto z + a$, where $a \in \mathbb{C}$ (translation)
 - $z \mapsto az$, where $a \neq 0$ (rotation + scaling)
 - $z \mapsto 1/z$ (inversion)

Show that every Möbius transform $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ can be represented as a composition of the above maps.

5. Determine the integral $\int_{\gamma} z \operatorname{Im} z dz$, where γ is the positively oriented boundary of the triangle with vertices 0 , 3 and $3 + 4i$.

[Hint: Lectures \Rightarrow you can represent γ as a product of three paths and choose suitable parametrizations for these. How to evaluate the integral over a product of paths ?]