Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 6
1.11.2016

1. Olkoon $f(z) = \frac{z-1}{z+4}$ ja $g(z) = \frac{z}{z-1}$. Muodosta $g \circ f$ ja $f^{-1} \circ g$.
Onko $f \circ g$ meromorfinen koko $\overline{\mathbb{C}}$:ssä ? (miksi ?)

Ratkaisu:

Lasketaan suoraan

$$g \circ f = g(f(z)) = \frac{\frac{z-1}{z+4}}{\frac{z-1}{z+4} - 1} = \frac{\frac{z-1}{z+4}}{\frac{z-1-z-4}{z+4}} = \frac{z-1}{-5}.$$

Seuraavaa laskua varten tarvitsemme funktion f käänteiskuvauksen f^{-1}. Yleisesti muotoa $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ olevan kuvauksen (Eli Möbius-kuvausten) käänteiskuvaus on $h^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$, jonka voi helposti tarkistaa laskemalla $h \circ h^{-1}(z) = z$ ja $h^{-1} \circ h(z) = z$. Tällöin $f^{-1}(z) = \frac{4z+1}{-z+1}$. Lasketaan tämän avulla viimeinen lasku, eli

$$f^{-1} \circ g = f^{-1}(g(z)) = \frac{\frac{4z}{z-1} + 1}{\frac{-z}{z-1} + 1} = \frac{\frac{4z+z-1}{z-1}}{\frac{-z+z-1}{z-1}} = \frac{5z-1}{-1} = -5z + 1.$$

Lasketaan ensin $f \circ g$ kuten yllä

$$f \circ g = f(g(z)) = \frac{\frac{z}{z-1} - 1}{\frac{z}{z-1} + 4} = \frac{\frac{z-(z-1)}{z-1}}{\frac{z+4z-4}{z-1}} = \frac{1}{5z-4}.$$

Tämä on selvästi meromorfinen kuvaus esimerkin 6.13 mukaisesti, sillä se on muotoa $\frac{P(z)}{Q(z)}$, missä P ja Q polynomeja.

2. Onko funktiolla $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ raja-arvoa $\overline{\mathbb{C}}$:ssä, kun $z \to \infty$?

Ratkaisu:

Huomataan ensin, että kun lähestytään ääretöntä pitkin positiivista reaaliakselia pätee $\mid \sin(x) \mid \leq 1$, joten pätee

$$\lim_{x\to\infty, x>0, x\in\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

Tutkitaan nyt miten funktio käyttäytyy kun lähestytään ääretöntä pitkin imaginääriakselia. Valitaan nyt $z = ix$, missä jälleen $x \in \mathbb{R}$ ja $x > 0$. Tällöin $\frac{\sin(z)}{z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2iz} = \frac{e^{-x}-e^{x}}{-2x}$. Mutta nyt, koska tunnetusti eksponentti funktio kasvaa nopeammin kuin mikään polynomi ja e^{-x} lähestyy nollaa kun x kasvaa, pätee että

$$\lim_{x\to\infty, x>0, x\in\mathbb{R}} \frac{e^{-x}-e^{x}}{-2x} = \infty.$$

Siis on saatu kaksi eri raja-arvokandidaattia kun lähestytään ääretöntä eri suunnista, joten funktiolla ei ole raja-arvoa äärettömyydessä.

3. Geometrisen sarjan ominaisuuksista tiedämme, että funktiolla $f(z) = \frac{1}{1+z}$ on potenssisarjakehitelmä keskuksena origo, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k z^k$, ja ko. sarja suppenee $\Leftrightarrow |z| < 1$.

Osoita, että $f(z)$ voidaan kehittää myös muotoa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k(z-2)^n$$

olevaksi potenssisarjaksi, joka suppenee kiekossa $D(2,3)$. Määrää kertoimet a_k. [Vihje: $1+z = z-2+3$]

Ratkaisu:

Lasketaan ensin

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{3+z-2} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\left(-\frac{z-2}{3}\right)}.$$

Kun $z \in B(2,3)$ pätee $\left|\frac{z-2}{3}\right| < 1$ joten voidaan kehittää lauseke tässä kuulassa sarjaksi

$$\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2)^n}{3^n},$$

josta voidaan suoraan lukea $a_n = \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$.

4. a) Luennoilta tiedetään, että jos $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $f'(z) \neq 0$, silloin f on konforminen pisteessä z. Entä jos $f'(z) = 0$? Tarkastele tätä funktiolle $f(z) = (z-a)^n$, missä $n \geq 2$, derivaatan nollakohdissa; piirrä kuvat !

b) Jos $\log(z)$ on logaritmin päähaara alueessa $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, onko $\log(z)$:lla raja-arvoa $\overline{\mathbb{C}}$:ssa, kun $z \to 0$ alueessa D ?

Ratkaisu:

a: Muuttujanvaihtoa käyttäen voidaan olettaa, että $a = 0$, jolloin tutkittavaksi jää kuvaus $f(z) = z^n$. Tämän kuvauksen derivaatalla on nollakohta ainoastaan origossa. Valitaan nyt puolisuorat $L = [0, \infty)$ ja $S = \{te^{\frac{i\pi}{n}} : t \geq 0, t \in \mathbb{R}\}$ ja huomataan, että $f(L) = L$ ja $f(S) = (-\infty, 0]$. Selvästi $f(L)$ ja $f(S)$ leikkaavat eri kulmassa kuin L ja S, joten f ei ole konforminen origossa.

b: Määritelmän nojalla logaritmin päähaaralle pätee $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$, missä arg on argumentin päähaara. Reaalisen logaritmin ominaisuuksien nojalla, kun $|z| \to 0$ niin $\log(|z|) \to -\infty$, joten myös kompleksisen logaritmin päähaaralle pätee $|\log(z)| \to \infty$ kun $|z| \to 0$. Joten mielivaltaiselle $M > 0$ pätee, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että jos $|z| < \delta$ ja $z \in D$, niin $\log(z) \in D(\infty, M)$. Tästä nähdään, että suljetussa kompleksitasossa $\overline{\mathbb{C}}$ pätee $\log(z) \to \infty$ kun $z \to 0$ alueessa D.

5. Johda pallometriikan lausekkeet

$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \qquad d(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}},$$

kun $z, w \in \mathbb{C}$.

[Vihje: Käytä sopivia yhdenmuotoisia kolmioita ja todista ensin jälkimmäinen väite; vrt. seuraavan sivun kuvat]

Ratkaisu:

Todistetaan ensin $d(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$. Tehdään tämä ensimmäistä vihjekuvaa hyödyntäen, huomaamalla että kolmiot joiden kärjet ovat $(0, p, z)$ ja

$(o, p, \sigma(z))$ ovat yhdenmuotoisia, sillä molemmissa on kaksi samaa kulmaa. Huomataan että kolmion $(o, p, \sigma(z))$ sivun $(p, \sigma(z))$ pituus on juurikin haluttu $d(\infty, z)$. Yhdenmuotoisista kolmioista tiedetään, että vastaavien sivujen suhde on sama, joten kulmien α ja $\frac{\pi}{2}$ väliin jäävien sivujen pituudet jaettuna kolmioiden hypotenuusilla ovat samat. Siis

$$\frac{d(\infty, z)}{1} = \frac{1}{\sqrt{1+ \mid z \mid^2}},$$

joka antaa heti halutun tuloksen.

Väitettä $d(z, w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}$ tutkimme kahdessa osassa. Ensinnäkin voidaan olettaa $z \neq w$, sillä tällöin väite on triviaali. Nyt jos jompikumpi on origo, saadaan väite $d(z, 0) = \frac{|z|}{\sqrt{1+|z|^2}}$. Tämä seuraa edellisen kohdan kolmiosta ja pythagoraan lauseesta suoraan, sillä nyt

$$d(0, z)^2 = 1 - d(z, \infty)^2,$$

josta laskemalla saadaan suoraan

$$d(0, z) = \frac{\mid z \mid}{\sqrt{1+ \mid z \mid^2}}.$$

Nyt voidaan olettaa $z \neq 0 \neq w$ ja $z \neq w$. Tällöin tutkitaan toisen vihjekuvan mukaisia kolmioita joiden kärjet ovat (p, z, w) ja $(p, \sigma(z), \sigma(w))$. Koska näillä kolmioilla on yhteinen kulma α yhdenmuotoisuuden osoittamiseksi riittää näyttää että vastaavien sivujen suhde on sama. Lasketaan tätä varten $\frac{d(p,\sigma(z))}{d(p,w)}$ ja $\frac{d(p,\sigma(w))}{d(p,z)}$. Nyt

$$\frac{d(p, \sigma(z))}{d(p, w)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}}{\sqrt{1+ \mid w \mid^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+ \mid z \mid^2}\sqrt{1+ \mid w \mid^2}}.$$

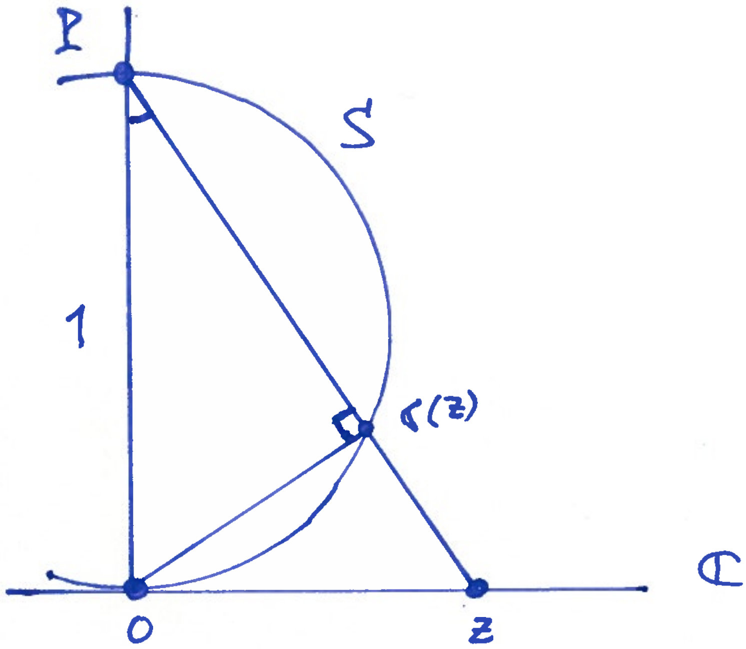
Täysin vastaavasti

$$\frac{d(p, \sigma(w))}{d(p, z)} = \frac{1}{\sqrt{1+ \mid z \mid^2}\sqrt{1+ \mid w \mid^2}}.$$

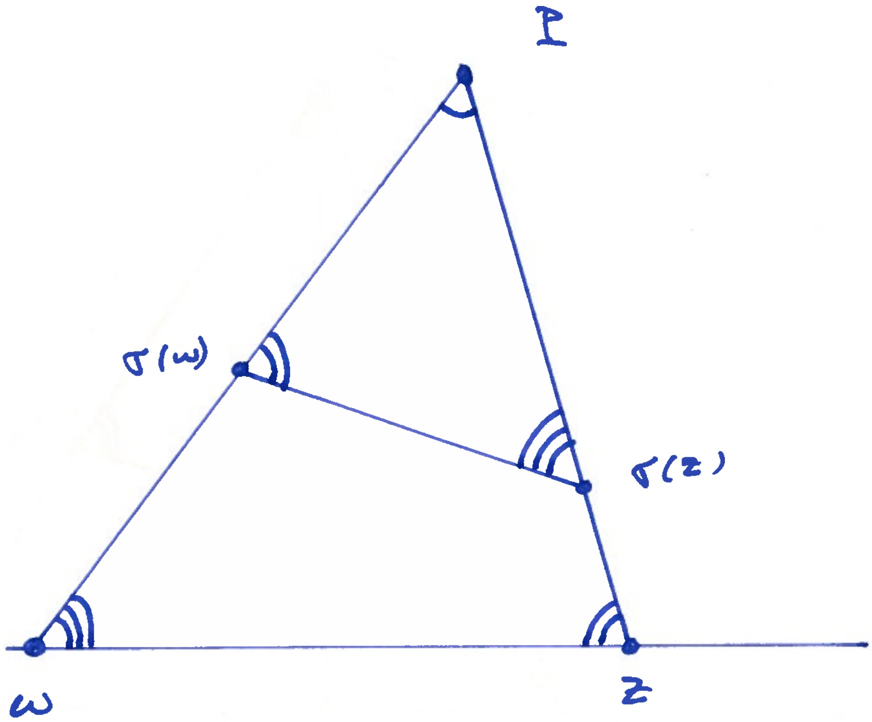
Täten kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Nyt huomataan että sivun jonka kärjet ovat $\sigma(z), \sigma(w)$ pituus on juurikin haluttu etäisyys $d(z, w)$ ja että sivun jonka kärjet ovat (z, w) pituus on $\mid z - w \mid$. Tällöin saadaan yhdenmuotoisia kolmioita ja sivujen suhdelukua käyttäen että

$$d(z, w) = \frac{\mid z - w \mid}{\sqrt{1+ \mid z \mid^2}\sqrt{1+ \mid w \mid^2}},$$

kuten haluttiin.



P
S
1
σ(z)
ℂ
0
z



P
σ(w)
σ(z)
w
z