Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 6
1.11.2016

1. Olkoon $f(z) = \frac{z-1}{z+4}$ ja $g(z) = \frac{z}{z-1}$. Muodosta $g \circ f$ ja $f^{-1} \circ g$.
Onko $f \circ g$ meromorfinen koko $\overline{\mathbb{C}}$:ssä ? (miksi ?)

2. Onko funktiolla $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ raja-arvoa $\overline{\mathbb{C}}$:ssä, kun $z \to \infty$?

3. Geometrisen sarjan ominaisuuksista tiedämme, että funktiolla $f(z) = \frac{1}{1+z}$ on potenssisarjakehitelmä keskuksena origo, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k z^k$, ja ko. sarja suppenee $\Leftrightarrow |z| < 1$.

Osoita, että $f(z)$ voidaan kehittää myös muotoa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z-2)^n$$

olevaksi potenssisarjaksi, joka suppenee kiekossa $D(2,3)$. Määrää kertoimet a_k. [Vihje: $1 + z = z - 2 + 3$]

4. a) Luennoilta tiedetään, että jos $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen ja $f'(z) \neq 0$, silloin f on konforminen pisteessä z. Entä jos $f'(z) = 0$? Tarkastele tätä funktiolle $f(z) = (z-a)^n$, missä $n \geq 2$, derivaatan nollakohdissa; piirrä kuvat !

b) Jos $\log(z)$ on logaritmin päähaara alueessa $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, onko $\log(z)$:lla raja-arvoa $\overline{\mathbb{C}}$:ssa, kun $z \to 0$ alueessa D ?

5. Johda pallometriikan lausekkeet

$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \qquad d(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}},$$

kun $z, w \in \mathbb{C}$.

[Vihje: Käytä sopivia yhdenmuotoisia kolmioita ja todista ensin jälkimmäinen väite; vrt. seuraavan sivun kuvat]

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 6
1.11.2016

1. Let $f(z) = \frac{z-1}{z+4}$ and $g(z) = \frac{z}{z-1}$. Form $g \circ f$ and $f^{-1} \circ g$.
Is $f \circ g$ meromorfic in $\overline{\mathbb{C}}$? (why ?)

2. Does the function $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ have a limit in $\overline{\mathbb{C}}$, when $z \to \infty$?

3. We know that the function $f(z) = \frac{1}{1+z}$ has a power series development with centre at origin, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k z^k$, and the series converges $\Leftrightarrow |z| < 1$.

Show that you can develop $f(z)$ also to a power series of the form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z-2)^n,$$

converging in the disc $D(2,3)$. Determine the coefficients a_k.
[Hint: $1 + z = z - 2 + 3$]

4. a) From the lectures we know that if $f : A \to \mathbb{C}$ is analytic and $f'(z) \neq 0$, then f is conformal at the point z. What happens when $f'(z) = 0$? Consider this question for $f(z) = (z-a)^n$, where $n \geq 2$, at the zeroes of its derivative; draw the picture!

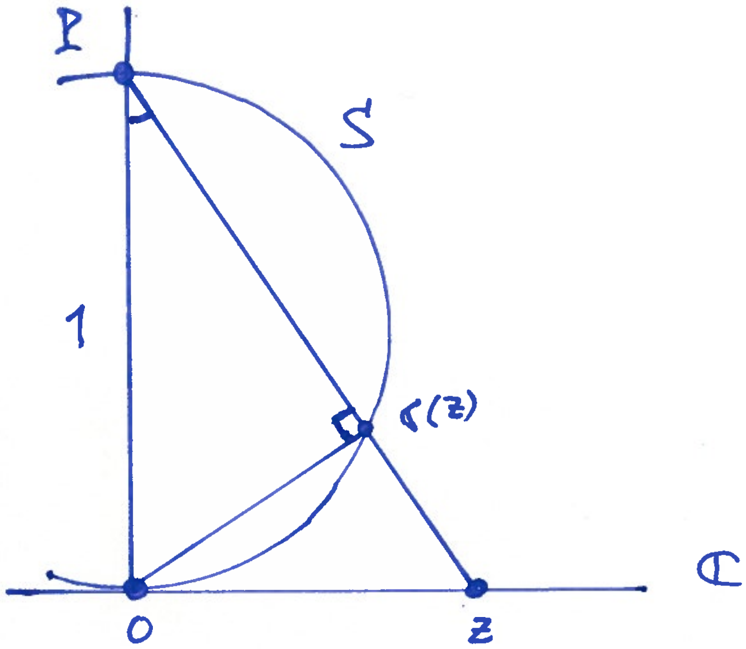
b) If $\log(z)$ is the principal branch of the logarithm in the domain $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, does $\log(z)$ have a limit in $\overline{\mathbb{C}}$ when $z \to 0$ in D ?

5. Determine the exact expressions for the spherical metric,

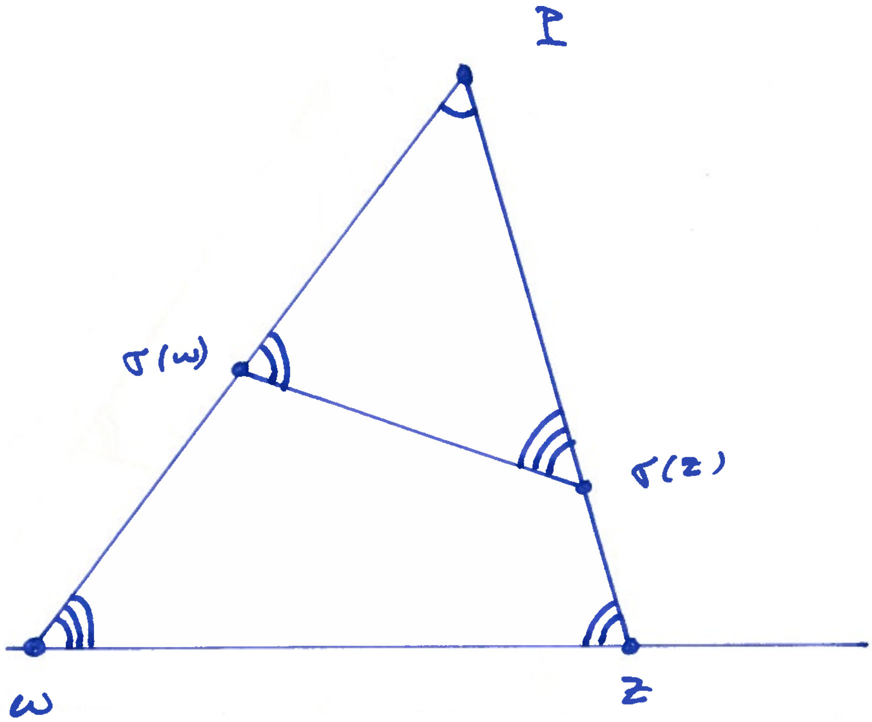
$$d(z,w) = \frac{|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}, \qquad d(z,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}},$$

when $z, w \in \mathbb{C}$.

[Hint: Use suitable similar triangles and prove first the latter claim; c.f. the pictures on the next page]



P
S
1
σ(z)
ℂ
0
z



P
σ(w)
σ(z)
w
z