Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 5
18.10.2016

1. Määrää kaikki funktion $f(z) = z^3$ käänteiskuvauksen haarat alueessa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Ratkaisu.

Halutut kuvauksen haarat ovat $g_n(w) = g_n(re^{i\phi}) = r^{1/3}e^{i(\phi/3+n2\pi/3)}$, missä $n \in \{-1, 0, 1\}$.

Tarkistetaan tämä. Lause 2.19 mukaan argumentin päähaara on jatkuva, joten selvästi kuvaukset g_n ovat jatkuvia kaikilla $n \in \{-1, 0, 1\}$. Lisäksi pätee $f(g_n(z)) = f(g_n(re^{i\phi})) = f(r^{1/3}e^{i\phi/3+i2n\pi/3}) = (r^{1/3})^3 e^{i(3(\phi/3+n2\pi/3))} = re^{i\phi+i2\pi n} = re^{i\phi}$ kaikilla $n \in \{-1, 0, 1\}$ ja kaikilla $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Siis kyseessä ovat funktion $f(z) = z^3$ haarat. Niitä ei selvästi ole enempää, sillä jokaisella pisteellä alueessa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ on kolme alkukuvaa kuvauksessa f.

2. a) Laske seuraavien potenssien (kaikki) arvot: i^{-2i}, 7^{1+i} ja $(-1)^{\sqrt{2}}$.

   b) Määrää kaikki kompleksiluvut z joille $e^{z/2} = -1 + i$.

   c) Määrää kaikki kompleksiluvut z, joille $\sin z = -2i$.
   [Vihje: ensin $t = e^{iz}$]

Ratkaisu

a: Lasketaan suoraan annetut potenssit.
$i^{-2i} = e^{-2i\log(i)} = e^{-2i(\log 1+\frac{i\pi}{2}+2\pi in)} = e^{\pi+4n\pi}$.

$7^{1+i} = 7 \cdot 7^i = 7e^{i\log 7} = 7e^{i(\log 7-2n\pi i)} = 7e^{2n\pi+i\log 7}$

$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\log(-1)} = e^{\sqrt{2}(i\pi+2in\pi)} = e^{\sqrt{2}i\pi+2\sqrt{2}in\pi}$.

b: Lasketaan ensin yhtälö $e^z = -1 + i$. Tälläiselle yhtälölle saadaan kaikki ratkaisut muokkaamalla yhtälö muotoon $e^z = e^{\log(-1+i)}$, josta saadaan (muista logaritmin moniarvoisuus!) $z = \log(-1 + i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} + n2\pi i$.

Tästä nähdään suoraan että halutun yhtälön ratkaisevat luvut

$$z = 2(\log(\sqrt{2}) + i\frac{3\pi}{4} + n2\pi i)$$

.

c: Muistetaan sinin määritelmä ja ratkaistaan sen avulla yhtälö, $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -2i$. Merkitään vihjeen mukaisesti $e^{iz} = t$, jolloin puolittain yhtälöä $2it$:llä kertomalla saadaan se muotoon $t^2 - 4t - 1 = 0$. Tästä saadaan $t = 2 \pm \sqrt{5}$.

Lasketaan ensin milloin $e^{iz} = 2 + \sqrt{5}$. Tästä saadaan $iz = \log(2 + \sqrt{5}) = \log(2 + \sqrt{5}) + 2\pi ni$, josta saadaan $z = 2\pi n - i\log(2 + \sqrt{5})$.
Lasketaan seuraavaksi milloin $e^{iz} = 2 - \sqrt{5}$ ja huomataan että $2 - \sqrt{5} < 0$. Tästä saadaan $iz = \log(2 - \sqrt{5}) = \log(\sqrt{5} - 2) + i\pi + 2n\pi i$, josta saadaan $z = \pi + 2n\pi - i\log(\sqrt{5} - 2)$.

3. Määrää ylemmässä puolitasossa $H = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ potenssifunktion $f(z) = z^{1-i}$ haara, joka toteuttaa ehdon

$$f(i) = e^{-\frac{3\pi}{2} - i\frac{3\pi}{2}}.$$

Ratkaisu: Potenssifunktion määritelmän nojalla haarat voidaan kirjoittaa muotoon

$$f_n(z) = e^{(1-i)(\log|z| + i\arg(z) + 2n\pi i)},$$

missä arg on argumentin päähaara. Sijoitetaan nyt $z = i$, jolloin saadaan

$$f_n(i) = e^{(1-i)(\frac{i\pi}{2} + 2n\pi i)}.$$

Valitaan seuraavaksi sopiva haara kiinnittämällä $n = -1$ ja varmistetaan laskemalla

$$f_{-1}(i) = e^{(1-i)\frac{-3i\pi}{2}} = e^{-\frac{3}{2\pi} - \frac{3i}{2\pi}}.$$

Eli f_{-1} on haluttu haara.

4. Osoita, että funktio $f(z) = \sin z$ on surjektio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, toisin sanoen, jokaisella $w \in \mathbb{C}$ yhtälölle $\sin(z) = w$ löytyy ratkaisu $z \in \mathbb{C}$.

Jos tiedät yhden ratkaisun, kuinka löydät muut ?

Ratkaisu: Olkoon $w \in \mathbb{C}$ mielivaltainen. Kirjoitetaan sini kompleksisessa muodossa ja osoitetaan, että on olemassa $z \in \mathbb{C}$ jolle

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = w.$$

Tästä saadaan yhtälö

$$e^{2iz} - e^{iz}w_1 - 1 = 0,$$

missä $w_1 = 2iw$. Merkitään $e^{iz} = x$, jolloin saadaan yhtälö

$$x^2 - w_1 x - 1 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat

$$x = \frac{w_1 \pm \sqrt{w_1^2 + 4}}{2}.$$

Koska ratkaisut ovat erisuuria kuin nolla ja eksponenttikuvaus on surjektio kompleksitasolle josta on poistettu origo, saadaan että on olemassa z_1 ja z_2 siten että $e^{iz_1} = x_1$ ja $e^{iz_2} = x_2$. Tämä osoittaa, että sini on surjektio. Kun on löydetty ratkaisut z_1 ja z_2 kaikki ratkaisut saadaan, eksponenttifunktion jaksollisuuden nojalla, valitsemalla $z_1 + 2n\pi$ ja $z_2 + 2n\pi$.

5. Olkoon $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ja $\sqrt{}$ neliöjuuren päähaara A:ssa. Päteekö laskusääntö

$$\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$$

aina kun $z \in A, \quad w \in A$ ja $zw \in A$? Jos ei, mikä menee pieleen ja miten vasemman ja oikean puolen luvut voivat erota toisistaan ?

Keksitkö jonkin luontevan riittävän ehdon luvuille z ja w, joka takaisi, että yo. laskusääntö olisi voimassa ?

Ratkaisu.

Osoitetaan esimerkillä että annettu kaava ei ole aina voimassa. Valitaan $w = z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Tällöin päähaaralle $\sqrt{}$ pätee että $\sqrt{z} = \sqrt{w} = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Mutta pisteen $zw = e^{i\frac{4\pi}{3}}$ argumentti ei kuulu päähaaran määrittelyalueeseen, joten $\sqrt{zw} = \sqrt{e^{i\frac{4\pi}{3}}} = \sqrt{e^{i\frac{-2\pi}{3}}} = e^{i\frac{-\pi}{3}}$. siis näillä valinnoilla saadaan $\sqrt{zw} = e^{i\frac{-\pi}{3}} \neq e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{z}\sqrt{w}$.

Yllä olevasta nähdään, että ongelmia tulee kun $\arg(zw) \notin (-\pi, \pi)$. Eli lausekkeen pätemiseksi tulee olla $\phi_z + \phi_w \in (-\pi, \pi)$, missä ϕ_z on z:n argumentin päähaara.

6. Osoita, että funktio $z \mapsto e^{1/z}$, $z \neq 0$, saa jokaisessa origon ympäristössä kaikki nollasta poikkeavat kompleksilukuarvot a, so. kaikki arvot $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[Vihje: Osoita ensin, että $g(z) = \frac{1}{z}$ kuvaa punkteeratun kiekon $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ kiekon $D(0, 1/\varepsilon)$ ulkopuoleksi. Tarkastele sitten sopivaa jaksovyötä.]

Ratkaisu

Huomataan ensin, että kuvaus $g(z) = \frac{1}{z}$ kuvaa origokeskisen kuulan $B(o, r)$ joukoksi $\mathbb{C} \setminus B(0, R)$, missä $R = \frac{1}{r}$. Tämä nähdään suoraan esimerkiksi luentomuistiinpanojen sivulla 32 esitetystä kaavasta $g(re^{i\phi}) = \frac{1}{r}e^{-i\phi}$. Täten annetusta mielivaltaisesta origon ympäristöstä U löytyy jokin $B(o, r)$ siten että $B(0, r) \subset A$ ja $r > 0$.

Tällöin tehtävän väite palautuu siihen, että kuvaus e^z saa kaikki kompleksilukuarvot nollaa lukuunottamatta alueessa $B = \mathbb{C} \setminus B(0, \frac{1}{r})$. Nyt huomataan, että jaksovyö $S_{\frac{1}{r}} = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{r} \leq \mathrm{Im}(z) \leq \frac{1}{r} + 2\pi\}$ kuuluu alueeseen B. Mutta tunnetusti eksponenttifunktio saa kaikki arvonsa jokaisessa jaksovyössä, joten erityisesti se saa kaikki arvonsa alueessa B. Siis väite on todistettu.

Lisähuomiona voidaan mainita että yllä oleva todistus osoittaa hiukan enemmän, nimittäin erillisiä jaksovöitä mahtuu selvästi ääretön määrä alueeseen B, joten kyseinen kuvaus saa kaikki arvot nollaa lukuunottamatta äärettömän monta kertaa mielivaltaisessa origon ympäristössä.