Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 5
18.10.2016

1. Määrää kaikki funktion $f(z) = z^3$ käänteiskuvauksen haarat alueessa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

2. a) Laske seuraavien potenssien (kaikki) arvot: i^{-2i}, 7^{1+i} ja $(-1)^{\sqrt{2}}$.

   b) Määrää kaikki kompleksiluvut z joille $e^{z/2} = -1 + i$.

   c) Määrää kaikki kompleksiluvut z, joille $\sin z = -2i$.
   [Vihje: ensin $t = e^{iz}$]

3. Määrää ylemmässä puolitasossa $H = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ potenssifunktion $f(z) = z^{1-i}$ haara, joka toteuttaa ehdon

$$f(i) = e^{-\frac{3\pi}{2} - i\frac{3\pi}{2}}.$$

4. Osoita, että funktio $f(z) = \sin z$ on surjektio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, toisin sanoen, jokaisella $w \in \mathbb{C}$ yhtälölle $\sin(z) = w$ löytyy ratkaisu $z \in \mathbb{C}$.

   Jos tiedät yhden ratkaisun, kuinka löydät muut ?

5. Olkoon $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ja $\sqrt{}$ neliöjuuren päähaara A:ssa. Päteekö laskusääntö

$$\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$$

aina kun $z \in A$, $w \in A$ ja $zw \in A$? Jos ei, mikä menee pieleen ja miten vasemman ja oikean puolen luvut voivat erota toisistaan ?

   Keksitkö jonkin luontevan riittävän ehdon luvuille z ja w, joka takaisi, että yo. laskusääntö olisi voimassa ?

6. Osoita, että funktio $z \mapsto e^{1/z}$, $z \neq 0$, saa jokaisessa origon ympäristössä kaikki nollasta poikkeavat kompleksilukuarvot a, so. kaikki arvot $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[Vihje: Osoita ensin, että $g(z) = \frac{1}{z}$ kuvaa punkteeratun kiekon $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ kiekon $D(0, 1/\varepsilon)$ ulkopuoleksi. Tarkastele sitten sopivaa jaksovyötä.]

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 5
18.10.2016

1. Determine in the domain $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ all branches of the inverse of $f(z) = z^3$.

2. a) Determine (all) values of the following complex powers:
i^{-2i}, 7^{1+i} and $(-1)^{\sqrt{2}}$.

b) Find all complex numbers z for which $e^{z/2} = -1 + i$.

c) Determine all complex numbers z for which $\sin z = -2i$.
[Hint: first $t = e^{iz}$]

3. Determine in the upper half plane $H = \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ the branch of the power function $f(z) = z^{1-i}$ for which we have

$$f(i) = e^{-\frac{3\pi}{2} - i\frac{3\pi}{2}}.$$

4. Show that the function $f(z) = \sin z$ is a surjection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, in other words, for every $w \in \mathbb{C}$ the equation $\sin(z) = w$ has a solution $z \in \mathbb{C}$.

If you know one solution, how do you find the others ?

5. Suppose $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ and $\sqrt{}$ is the principal branch of the square root in A. Does the identity

$$(*) \qquad \sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$$

hold always when $z \in A$, $w \in A$ and $zw \in A$? If not, what goes wrong, and how much can the result on the left and on the right differ ?

Can you find some natural and sufficient condition for the numbers z and w which would guarantee that the above rule $(*)$ would hold for them ?

6. Show that the function $z \mapsto e^{1/z}$, $z \neq 0$, attains in every neighbourhood of the origin 0 all non-zero complex values a, i.e. all values $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

[Hint: Show first that $g(z) = \frac{1}{z}$ maps the punctured disc $\{0 < |z| < \varepsilon\}$ onto the exterior of $D(0, 1/\varepsilon)$. Consider then a suitable period strip
$S_{y_0} = \{z : y_0 < \mathrm{Im}\, z < y_0 + 2\pi\}$.]