

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 4
11.10.2016

1. Määrittää seuraavien sarjojen suppenemissäde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)(n+2)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p (z+i)^n$$

Ratkaisu.

a: Käytetään suhdetestiä,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)}{(n+1)} = 1.$$

Siis suppenemissäde on 1.

b: Jos $z = 1$, niin selvästi kyseinen sarja hajaantuu. Kun taas $|z| < 1$ pätee $|z|^{n!} < |z|^n$ ja tällöin haluttu sarja suppenee peräti itseisesti, sillä

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z^{n!}| < \sum_{n=0}^{\infty} |z^n|,$$

ja tunnetusti sarja $\sum_{n=0}^{\infty} |z^n|$ suppenee kun $|z| < 1$. Siis suppenemissäde on 1.

c: Käytetään Hadamardin lausetta, jonka mukaan

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^p)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}})^p = 1,$$

sillä tunnetusti $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}}) = 1$ ja p vakio. Tästä nähdään, että suppenemissäde on 1.

2. a) Jos sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde on R , mikä on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ suppenemissäde?

b) Laske summan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n$ arvo kiekossa $D(0, 1)$ nojautumalla potenssisarjojen termeittäin derivoimista koskevaan sääntöön.

Ratkaisu.

a: Jos $|z| < \sqrt{R}$, niin $|z^2| < R$. Tästä seuraa, että jos $|z| < \sqrt{R}$ niin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^2)^n$ suppenee. Jos taas $|z| > \sqrt{R}$ niin pätee $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^2)^n$ hajaantuu. Siis suppenemissäde on \sqrt{R} .

b: Sievennetään

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1} = z D \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \right) = z D \frac{1}{1 - (-z)},$$

kuulussa $D(0, 1)$. Kun lasketaan derivaatta auki saadaan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n = \frac{-z}{(z+1)^2}$.

3. Kun $z \in \mathbb{C}$, määritellään $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ sekä $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

Osoita, että $\sin z$ ja $\cos z$ toteuttavat ehdon $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Osoita myös, että funktioilla $\cos(z)$ ja $\sin(z)$ on vain reaalisia nollakohtia. Mitkä?

Käytetään sinin ja kosinin määritelmiä ja osoitetaan yhtälö suoralla laskulla.

$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{-e^{2iz}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{-e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{e^{-2iz}}{4} = 1$, kuten haluttiin.

Osoitetaan sitten, että kuvauksella $\sin z$ on vain reaalisia nollakohtia ratkaissamalla yhtälö $\sin z = 0$. Käyttämällä jälleen sinin määritelmää saadaan yhtäpitävä yhtälö $e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1$. Ratkaisemalla viimeisestä yhtälöstä saadaan $2iz = 0 + 2n\pi i$, josta saadaan lopulta $z = n\pi$, eli tutut sinin nollakohdat reaaliakselilla. Lisäksi selvästi nähdään, että $n\pi \in \mathbb{R}$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.

Tehdään nyt oleellisesti sama lasku kosinille. Käyttäen kosinin määritelmää

ja toimien samoin kuin yllä päädytään yhtälöön $e^{2iz} = -1$, josta $2iz = i\pi + 2n\pi i$ ja täten $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$, eli jälleen pelkät tutut kosinin nollakohdat reaaliakselilla.

4. a) Millä ehdoilla reaalikertoiminen polynomi $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ on jonkin analyyttisen funktion reaaliosa? Määrittää nämä funktiot.

b) Jos $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ on analyyttinen alueessa A ja $\operatorname{Re} f = (\operatorname{Im} f)^3$, osoita, että f on vakio.

Ratkaisu.

a. Merkitään kyseistä polynomia g :llä. Funktio g on analyyttisen funktion reaaliosa jos ja vain jos se on harmoninen, sillä koko taso on yhdesti yhtenäisen alue. Eli ehto $g_{xx} + g_{yy} = 0$ on riittävä ja välttämätön. Laskemalla tämä auki saadaan ehto $2d + 2f = 0$, eli $d = -f$. Siis ne toisen asteen polynomit joille $d = -f$ ovat analyyttisen funktion reaaliosia.

Määritetään nyt nämä analyyttiset funktiot. Edellisen nojalla voidaan laskea $g_x = b + 2xd + ey$ ja $g_y = c + ex - 2dy$. Merkataan v :llä halutun analyyttisen funktion imaginääriosaa. Tällöin Cauchy-Riemannin yhtälöistä seuraa $v_y = g_x = b + 2xd + ey$ ja $v_x = -g_y = -c - ex + 2dy$, joten $v(x, y) = by - cx + 2dxy + \frac{e}{2}(y^2 - x^2) + l$, missä $l \in \mathbb{R}$ vakio. Selvästi sekä g että v ovat jatkuvasti differentioituvia koko tasossa, joten haluttu analyyttinen funktio on $g + iv$.

b. Olkoon $f = u + iv$ analyyttinen. Oletuksen nojalla $f = v^3 + iv$ ja tällöin $u_x = (v^3)_x = 3v^2v_x$. Vastaavasti myös $u_y = 3v^2v_y$. Nyt Cauchy-Riemannin yhtälöistä seuraa $v_y = 3v^2v_x$ ja $v_x = -3v^2v_y$. Sijoittamalla ensimmäinen toiseen saadaan $v_x = -3v^2(3v^2v_x)$ joka sievenee muotoon $v_x(1 + 9v^4) = 0$. Mutta tämä selvästi pätee vain jos $v_x = 0$, jolloin myös $v_y = 0$. Koska tämä pätee kaikilla $z \in A$ saadaan lauseen 3.19 nojalla, että f on vakio.

5. Osoita, että jokaiselle reaali-lukujonolle $(x_k)_{k=1}^\infty$ pätee:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k|^{1/k} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |k x_k|^{1/k}.$$

Ratkaisu: Limes superiorin määritelmän nojalla riittää osoittaa, että

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \{|x_k|^{1/k}, \dots\} = \limsup_{k \rightarrow \infty} \{|k x_k|^{1/k}, \dots\}. \quad (1)$$

Mutta nyt $|kx_k|^{1/k} = k^{\frac{1}{k}}|x_k|^{1/k}$ ja tunnetusti $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{\frac{1}{k}} = 1$. Täten mielivaltaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa n_ϵ siten, että $k^{\frac{1}{k}} < 1 + \epsilon$ kun $k > n_\epsilon$. Tästä nähdään, että $\sup\{|kx_k|^{1/k}, \dots\} < (1 + \epsilon) \sup\{|x_k|^{1/k}, \dots\}$ kun $k > n_\epsilon$. Täten, koska ϵ oli mielivaltainen ja selvästi $k^{\frac{1}{k}} \geq 1$ kaikilla k , nähdään että yhtälö (1) pätee.

6. Olkoot s sekä x_1, x_2, \dots reaalilukuja. Osoita, että $s = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

- i) Aina kun $r > s$, pätee $x_n < r$ lukuunottamatta äärellisen monta indeksistä n . (eli on olemassa n_0 niin että $x_n < r$ kun $n > n_0$.)
- ii) Aina kun $r < s$, äärettömän monella indeksillä n pätee $x_n > r$. (eli jokaiselle n_0 löytyy indeksi $n > n_0$ niin että $x_n > r$).

Mikä on vastaava ehto tapaukselle $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$? (ei tarvitse todistaa.)

Ratkaisu.

Oletetaan ensin, että $s = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ja osoitetaan että halutut ehdot pätevät. Määritelmän nojalla $s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Osoitetaan ensin vastaoletusta käyttämällä, että ehto 1 pätee. Jos olisi olemassa $r > s$ siten että $x_n \geq r$ äärettömän monella n , niin pätesi että $\sup\{x_k, x_{k+1}, \dots\} \geq r$ kaikilla k . Täten $s \geq r$ määritelmänsä nojalla, mikä on ristiriita. Siis väite 1 pätee.

Osoitetaan samoin vastaoletuksella, että väite 2 pätee. Jos olisi olemassa $r < s$ siten että $x_n > r$ vain äärellisen monella indeksillä n voitaisiin valita suurin näistä indekseistä, olkoon se \bar{n} . Tällöin $\sup\{x_k, x_{k+1}, \dots\} \leq r$ kaikilla $k > \bar{n}$, jolloin $s \leq r$ määritelmänsä nojalla. Saatiin jälleen ristiriita, joten väite 2 pätee.

Osoitetaan nyt toinen suunta, eli oletetaan että väitteet 1 ja 2 pätevät ja merkitään $\bar{s} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. Ehdon 1 nojalla mielivaltaisella $r > s$ pätee, että $x_n < r$ kun n on riittävän suuri. Tällöin $\sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \leq r$ kun n on riittävän suuri, joten $\bar{s} < r$. Koska tämä pätee kaikilla $r > s$ saadaan, että $\bar{s} \leq s$.

Täysin vastaavasti ehdosta 2 seuraa että $\bar{s} \geq s$. Nimittäin nyt mielival-

taista $r < s$ kohti on olemassa äärettömän monta indeksiä n joilla $x_n > r$. Tällöin $\sup\{x_n, x_{n+1} \cdots\} \geq r$ kaikilla n ja täten $\bar{s} \geq r$. Koska $r < s$ oli mielivaltainen saadaan, että $\bar{s} \geq s$. Nyt koska $\bar{s} \geq s$ ja $\bar{s} \leq s$ pätee, että $s = \bar{s}$. Siis myös toinen suunta on todistettu.

Ehto tapaukselle limsup on ääretön on muotoa kaikilla $r \in \mathbb{R}$ on olemassa äärettömän monta indeksiä n siten, että $x_n > r$.