Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 4
11.10.2016

1. Määrää seuraavien sarjojen suppenemissäteet

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p (z+i)^n$$

2. a) Jos sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenemissäde on R, mikä on sarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$ suppenemissäde ?

b) Laske summan $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n$ arvo kiekossa $D(0,1)$ nojautumalla potenssisarjojen termeittäin derivoimista koskevaan sääntöön.

3. Kun $z \in \mathbb{C}$, määritellään $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(e^{iz}+e^{-iz}\big)$ sekä $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(e^{iz}-e^{-iz}\big)$. Osoita, että $\sin z$ ja $\cos z$ toteuttavat ehdon $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Osoita myös, että funktioilla $\cos(z)$ ja $\sin(z)$ on vain reaalisia nollakohtia. Mitkä?

4. a) Millä ehdoilla reaalikertoiminen polynomi $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ on jonkin analyyttisen funktion reaaliosa ? Määrää nämä funktiot.

b) Jos $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen alueessa A ja $\mathrm{Re} f = (\mathrm{Im} f)^3$, osoita, että f on vakio.

5. Osoita, että jokaiselle reaalilukujonolle $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ pätee:

$$\limsup_{k\to\infty} |x_k|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |k\, x_k|^{1/k}.$$

6. Olkoot s sekä $x_1, x_2, \ldots$ reaalilukuja. Osoita, että $s = \limsup_{n\to\infty} x_n$ jos ja vain jos seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa:

i) Aina kun $r > s$, pätee $x_n < r$ lukuunottamatta äärellisen monta indeksiä n. (eli on olemassa n_0 niin että $x_n < r$ kun $n > n_0$.)

ii) Aina kun $r < s$, äärettömän monella indeksillä n pätee $x_n > r$. (eli jokaiselle n_0 löytyy indeksi $n > n_0$ niin että $x_n > r$).

Mikä on vastaava ehto tapaukselle $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$? (ei tarvitse todistaa.)

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 4
11.10.2016

1. Determine the radius of convergence for the following power series,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(n+1)(n+2)}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^p (z+i)^n$$

2. a) If $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ has radius of convergence R, what is the radius of convergence for the series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2n}$?

b) Determine the sum $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n z^n$ in $D(0,1)$, by expressing it as the derivative of a power series.

3. For $z \in \mathbb{C}$, we define $\cos(z) = \frac{1}{2}\big(e^{iz} + e^{-iz}\big)$ and $\sin(z) = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$. Show that $\sin z$ ja $\cos z$ satisfy the equation $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ for every $z \in \mathbb{C}$. Prove also that the functions $\cos(z)$ and $\sin(z)$ have only real zeroes. Which ?

4. a) Under which condition the polynomial with real coefficients $a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$ is the real part of an analytic function ? Determine these functions.

b) If $f : A \to \mathbb{C}$ is analytic in a domain A and $\mathrm{Re} f = (\mathrm{Im} f)^3$, show that f is constant.

5. Show that every sequence of real numbers $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ satisfies:

$$\limsup_{k\to\infty} |x_k|^{1/k} = \limsup_{k\to\infty} |k\, x_k|^{1/k}.$$

6. Suppose s and $x_1, x_2, \dots$ are real numbers. Show that $s = \limsup_{n\to\infty} x_n$ if and only if the following two conditions hold:

i) Whenever $r > s$, we have $x_n < r$ up to a finitely many indexes n.
(i.e. there is n_0 so that $x_n < r$ when $n > n_0$.)

ii) Whenever $r < s$, we have $x_n > r$ for infinitely many indexes n.
(i.e. for every n_0 there is $n > n_0$ so that $x_n > r$).

What is the corresponding condition in the case $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty$? (proof is not needed.)