Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 3
4.10.2016

1. Tutki missä tasoalueessa $f(z) = \left(\frac{z-2}{3+iz}\right)^3$ on analyyttinen; määrää derivaatta $f'(z)$ ko. joukon pisteissä.

Ratkaisu.

Seuraus 3.6 nojalla f on analyyttinen koko tasossa lukuunottamatta nimittäjän nollakohtia. Siis f on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$.

Määrätään seuraavaksi derivaatta tässä alueessa. Käytetään tähän lauseen 3.8 ketjusääntöä ja lasketaan

$$f'(z) = 3\left(\frac{z-2}{3+iz}\right)^2 \frac{3+iz-i(z-2)}{(3+iz)^2} = \frac{(9+6i)(z-2)^2}{(3+iz)^4},$$

kun $z \in \mathbb{C} \setminus \{3i\}$.

2. Osoita, että jokainen $\mathbb{R}^2$:n ensimmäisen asteen reaalikertoiminen polynomi $u(x,y) = a + bx + cy$ on jonkin analyyttisen funktion f reaaliosa.
[Vihje: Muista Cauchy ja Riemann]

Ratkaisu.

Käytetään Cauchy-Riemannin yhtälöitä sopivan imaginääriosan etsimiseen. Saadaan että

$$v_y = u_x = b$$

ja

$$v_x = -u_y = -c.$$

Tällöin esimerkiksi funktio $v(x,y) = -cx + by$ toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälöt $u(x,y)$:n kanssa. Nyt huomautus 3.16 nojalla funktio $f = u(x,y) + iv(x,y)$ on analyyttinen koko tasossa, sillä $u(x,y)$ ja $v(x,y)$ ovat jatkuvasti differentioituvia koko tasossa ja toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt koko tasossa. Siis $u(x,y)$ on jonkin analyyttisen funktion reaaliosa.

Toinen tapa nähdä että f on analyyttinen on suoraan laskea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = a + bx + cy - icx + iby = a + b(x+iy) - ic(x+iy) = a + bz - icz$ joka selvästi on analyyttinen koko tasossa.

3. Hajota funktio $f(z) = 1/z^2, \quad z \neq 0,$ reaali- ja imaginääriosiinsa, sekä osoita, että Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat.

Ratkaisu.

Lasketaan suoraan

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(x+iy)^2} = \frac{1}{x^2 - y^2 + 2xyi} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = \frac{x^2 - y^2 - 2xyi}{(x^2+y^2)^2},$$

josta nähdään reaali- ja imaginääriosat.

Tarkistetaan seuraavaksi Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Tätä varten lasketaan osittaisderivaatat

$$u_x(z) = \frac{2x(-x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$u_y(z) = \frac{2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$v_x(z) = \frac{-2y(y^2-3x^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

$$v_y(z) = \frac{-2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3},$$

joista nähdään, että Cauchy Riemann yhtälöt $u_x(z) = v_y(z)$ ja $u_y(z) = -v_x(z)$ toteutuvat.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ on analyyttinen joukossa

$B = \{\overline{z} : z \in A\}$. Onko B avoin ?

Ratkaisu.

Tutkitaan erotusosamäärää. Funktion g määritelmästä saadaan kaikilla $z_0 \in B$, että

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)}.$$

Nyt koska $\bar{z}_0 \in A$, $\bar{z} \to \bar{z}_0$ kun $z \to z_0$ ja f on analyyttinen joukossa A saadaan, että

$$g'(z_0) = \overline{f'(\bar{z}_0)}.$$

Ja täten g:llä on kompleksinen derivaatta jokaisessa pisteessä $z \in B$. Kun vielä toteamme että B on avoin, saadaan, että g analyyttinen joukossa B. Toisaalta joukon B avoimuus on selvä, sillä selvästi peilaus $z \to \bar{z}$ on jatkuva bijektio, lisäksi se on oma käänteiskuvauksensa joka siis myös on jatkuva. Täten se on homeomorfismi ja siten säilyttää avoimet joukot. Täten joukon B avoimuus seuraa joukon A avoimuudesta.

5. Olkoon $S_0 = \{z = x + iy : x \leq y < x + 2\pi\}$. Piirrä S_0:n kuva, ja osoita, että $e^z : S_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on bijektio. Hahmottele myös eksponenttifunktion kuva suorasta $y = x$.

[Vihje: Miten e^z kuvaa S_0:aan sisältyvät pystysuorat janat ?]

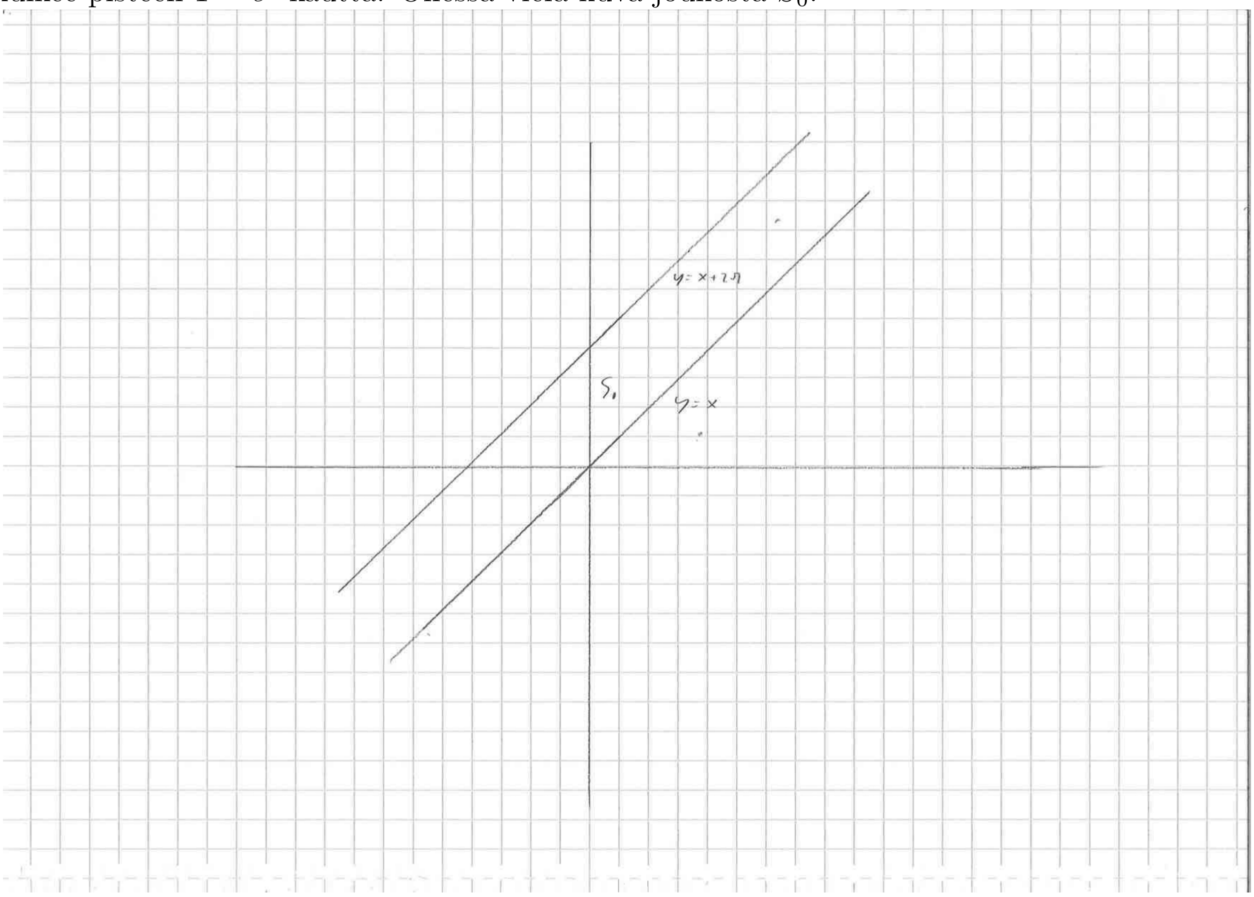
Ratkaisu.

Valitaan $x \in \mathbb{R}$ mielivaltaisesti ja tutkitaan kuinka e^z kuvaa pystysuoran janan $[x + ix, x + i(x + 2\pi)) \subset S_0$. Nyt $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$, missä $y \in [x, x + 2\pi)$, joten kompleksiluvun e^{x+iy} moduli on e^x ja argumentti on y. Ja koska y kulkee yli janan jonka pituus on 2π ja jana on puoliavoin, nähdään että e^z kuvaa janan $[x + ix, x + i(x + 2\pi))$ bijektiivisesti e^x säteisen kuulan reunalle.

Koska e^x on aidosti kasvava jatkuva kuvaus huomataan, että kun x käy läpi kaikki reaaliluvut niin e^x käy bijektiivisesti läpi kaikki positiiviset reaaliluvut. Tästä seuraa, että e^z kuvaa joukon S_0 bijektiivisesti alueelle $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sillä jokaista ympyrää $S(o, r)$ kohti löytyy täsmälleen yksi jana $[x+ix, x+i(x+2\pi))$

joka kuvautuu bijektiivisesti sille.

Hahmotellaan lopuksi vielä suoran $x = y$ kuvaa. Tulee siis tutkia termin e^{x+ix} käytöstä kun x käy läpi reaaliluvut. Kun $x \to -\infty$ kuvan moduli lähestyy nollaa ja vastaavasti kun $x \to \infty$ kuvan moduli lähestyy ääretöntä. Vastaavasti termin e^{x+ix} argumentti on x, josta nähdään että kuvajoukko kiertää origoa negatiiviseen suuntaan kun x pienenee ja positiiviseen suuntaan kun x kasvaa. Saadaan siis spiraali, joka kiertää origoa vakionopeudella ja kulkee pisteen $1 = e^0$ kautta. Ohessa vielä kuva joukosta S_0.



6. Olkoon $f(x + iy) = \sqrt{|x||y|}$. Osoita, että f:llä on pisteessä $z = 0$ osittaisderivaatat, jotka toteuttavat Cauchy-Riemann yhtälöt. Osoita, ettei f:llä kuitenkaan ole kompleksista derivaattaa tässä pisteessä.

Ratkaisu.

Kuvaus f on reaaliarvoinen, joten $Im(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$ ja täten $v_x =$

$v_y = 0$ kaikilla z. Lisäksi f on identtisesti nolla reaali- ja imaginääriakselilla, joten valitaan $h \in \mathbb{R}$ ja lasketaan

$$u_x(0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(h,0) - 0}{h - 0} = 0,$$

sillä $u(h,0) = 0$ kaikilla $h \in \mathbb{R}$. Vastaavasti

$$u_y(0) = \lim_{h \to 0} \frac{u(0,h) - 0}{h - 0} = 0,$$

sillä $u(0,h) = 0$ kaikilla $h \in \mathbb{R}$. Täten selvästi Cauchy- Riemannin yhtälöt pätevät.

Osoitetaan vielä, että f ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä 0. Tätä varten riittää huomata

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h+ih) - 0}{h + ih - 0} = \frac{1}{1+i} \neq 0 = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h - 0},$$

missä jälleen h reaalinen. Siis f ei ole kompleksisesti derivoituva origossa, sillä erotusosamäärää ei ole olemassa.