Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 3
4.10.2016

1. Tutki missä tasoalueessa $f(z) = \left(\frac{z-2}{3+iz}\right)^3$ on analyyttinen; määrää derivaatta $f'(z)$ ko. joukon pisteissä.

2. Osoita, että jokainen $\mathbb{R}^2$:n ensimmäisen asteen reaalikertoiminen polynomi $u(x, y) = a + bx + cy$ on jonkin analyyttisen funktion f reaaliosa.

[Vihje: Muista Cauchy ja Riemann]

3. Hajota funktio $f(z) = 1/z^2$, $z \neq 0$, reaali- ja imaginääriosiinsa, sekä osoita, että Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat.

4. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin ja $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen. Osoita erotusosamäärää tutkimalla, että funktio $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ on analyyttinen joukossa $B = \{\overline{z} : z \in A\}$. Onko B avoin ?

5. Olkoon $S_0 = \{z = x + iy : x \leq y < x + 2\pi\}$. Piirrä S_0:n kuva, ja osoita, että $e^z : S_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on bijektio. Hahmottele myös eksponenttifunktion kuva suorasta $y = x$.

[Vihje: Miten e^z kuvaa S_0:aan sisältyvät pystysuorat janat ?]

6. Olkoon $f(x + iy) = \sqrt{|x||y|}$. Osoita, että f:llä on pisteessä $z = 0$ osittaisderivaatat, jotka toteuttavat Cauchy-Riemann yhtälöt. Osoita, ettei f:llä kuitenkaan ole kompleksista derivaattaa tässä pisteessä.

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 3
4.10.2016

1. Determine where the function $f(z) = \left(\frac{z-2}{3+iz}\right)^3$ is analytic. Determine also the derivative $f'(z)$ for z in that set.

2. Show that in $\mathbb{R}^2$ every real polynomial of first degree $u(x, y) = a + bx + cy$ is the real part of some analytic function f.

[Hint: Remember Cauchy and Riemann]

3. Find the real and imaginary part of the function $f(z) = 1/z^2, \quad z \neq 0$, and show that these satisfy the Cauchy - Riemann equations.

4. Suppose $A \subset \mathbb{C}$ is open and $f : A \to \mathbb{C}$ analytic. Show with help of difference quotients, that the function $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ is analytic in $B = \{\overline{z} : z \in A\}$. Is B open ?

5. Let $S_0 = \{z = x + iy : x \leq y < x + 2\pi\}$. Draw a picture of S_0, and show that $e^z : S_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ is a bijection. Skecth also the image of the line $y = x$ under the exponential function.

[Hint: How does e^z map the vertical line segments contained in S_0 ?]

6. Let $f(x + iy) = \sqrt{|x||y|}$. Show that f has partial derivatives at the point $z = 0$, and that these satisfy the Cauchy-Riemann equations. However, show that f does not have a complex derivative at this point.