Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 2
20.9.2016

1. Jos $z_0 = \sqrt{3} - i$, kirjoita z napaesityksessä, eli muodossa $z_0 = re^{i\theta}$.

Jos $\arg(z)$ tarkoittaa argumentin päähaara, valitse kulmaksi $\theta = \arg(z_0)$. Määrää z_0:n argumentti myös sille haaralle, jonka arvot ovat välillä $(0, 2\pi)$.

Lopuksi, määrää luku z^{21}.

Ratkaisu: Lasketaan ensin $|z_0| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = 2$ ja $\arg(z_0) = \frac{-\pi}{6}$. Koska $\frac{-\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$ tämä on argumentti rajoitettuna päähaaraan ja voidaan kirjoittaa $z_0 = 2e^{\frac{-i\pi}{6}}$.

Vaihtoehtoinen argumentin esitystapa saadaan laskemalla $\frac{-\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6} \in [0, 2\pi)$.

Lasketaan lopuksi $z_0^{21} = 2^{21}e^{\frac{-21i\pi}{6}} = 2^{21}e^{\frac{i\pi}{2}} = 2^{21}i$.

2. Määrää raja-arvo $\lim_{z\to -2} \frac{z^3+8}{z^2+2z}$.
[Vihje: $8 = 2^3$]

Ratkaisu: Lasketaan ensin

$$\frac{z^3+8}{z^2+2z} = \frac{z^3+2^3}{z(z+2)} = \frac{(z+2)(z^2-2z+4)}{z(z+2)} = \frac{z^2-2z+4}{z}.$$

Tämän avulla saadaan

$$\lim_{z\to -2} \frac{z^3+8}{z^2+2z} = \lim_{z\to -2} \frac{z^2-2z+4}{z} = -6.$$

3. Jos $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, onko f:llä (kompleksinen) derivaatta pisteessä $z = 1$?

Funktiolla f on kompleksinen derivaatta pisteessä 1 jos ja vain jos erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

on olemassa. Tässä muistetta, että h lähestyy nollaa mielivaltaisesti pitkin kompleksitasoa. Käytetään kaavaa $|z|^2 = z\overline{z}$ ja lasketaan

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(1+\overline{h})-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+\overline{h}+h\overline{h}}{h}.$$

Nyt jos h lähestyy nollaa pitkin reaaliakselin positiivista puolta nähdään, että raja-arvoksi saadaan 2. Toisaalta jos h lähestyy nollaa pitkin imaginääriakselin positiivista puolta nähdään, että raja-arvoksi tulee 0. Täten erotusosamäärällä ei ole raja-arvoa ja funktiolla f ei ole derivaattaa pisteessä $z = 1$.

4. Etsi seuraavien yhtälöiden juuret; anna ratkaisut napaesityksessä $z = re^{i\theta}$ sekä piirrä kuva, josta käy ilmi juurien sijainti kompleksitasossa.

a) $z^7 = -1$ b) $z^5 = 1 - i$

Ratkaisu: a: Koska kompleksilukujen kertolaskussa modulit kerrotaan keskenään saadaan ratkaistavalle yhtälölle ehto $\mid z \mid^7 = \mid -1 \mid$, josta seuraa $\mid z \mid = 1$. Siis kaikkien ratkaisujen on sijaittava yksikköympyrän reunalla. Jäljelle jää siis vielä selvittää mitkä ovat juurien argumentit.

Koska kertolaskussa argumentit summataan yhteen, saadaan argumentille ehto $7\phi = \pi$, missä π on luvun -1 argumentti. Tämän ehdon toteuttavat muotoa $\phi = \frac{\pi}{7} + \frac{n2\pi}{7}$ olevat argumentit, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Joten juuret ovat pisteet $e^{i\frac{\pi+n2\pi}{7}}$, missä n käy läpi luvut nollasta kutoseen. Piirtäminen käy helpoiten kun valitsee yhden juuren, esimerkiksi pisteen -1 ja huomaa että juuret sijaitsevat toisistaan kulman $\frac{2\pi}{7}$ välein.

b: Edetään samaan tapaan ja lasketaan ensin moduli ehdosta $|z|^5 = \sqrt{2}$, josta saadaan $|z| = 2^{\frac{1}{10}}$. Vastaavasti argumentille saadaan ehto $5\phi = \frac{7\pi}{4}$. Tämän ehdon toteuttavat muotoa $\phi = \frac{7\pi}{20} + \frac{n2\pi}{5}$ olevat argumentit, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Joten juuret ovat pisteet $2^{\frac{1}{10}} e^{i\frac{\pi(7+8n)}{20}}$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Kuvat tapauksista saa esimerkiksi kirjoittamalla kyseiset yhtälöt wolframalphaan, http://www.wolframalpha.com.

5. Olkoon L suora, joka kulkee pisteen $z_0 = -2$ kautta ja muodostaa kulman α reaaliakselin kanssa. Kirjoita kompleksilukujen avulla kuvaus, joka esittää peilausta suoran L suhteen.

Ratkaisu: Ideana on ensin siirtää suoraa siten että se kulkee origon kautta, tämän jälkeen kiertää se kulkemaan reaaliakselia pitkin ja tehdä peilaus. Tämän jälkeen kierretään suora takaisin alkuperäiseen asentoonsa ja siirretään takaisin kulkemaan pisteen $z_0 = -2$ kautta. Kuvien piirtäminen voi auttaa tilanteen hahmottamisen kanssa.

Aloitamme ensin siirtämällä suoran kulkemaan origon kautta käyttäen kuvausta $g(z) = z + 2$. Tämän jälkeen kierretään suoraa $g(L)$ siten, että se kuvautuu reaaliakseliksi, joka onnistuu kuvauksella $h(z) = (z + 2)e^{-i\alpha}$. Tämän jälkeen yhdistetään kuvaukseen peilaus reaaliakselin suhteen, eli konjugoidaan ja saadaan kuvaus $q(z) = (\overline{z} + 2)e^{i\alpha}$. Lopulta kierretään suora takaisin alkuperäiseen kulmaan ja siirretään paikoilleen, jolloin saadaan kuvaus

$$f(z) = (\overline{z} + 2)e^{2i\alpha} - 2,$$

joka siis on peilaus suoran L suhteen.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $f : A \to \mathbb{C}$ jokin funktio. Oletamme, että a on joukon A kasautumispiste ja $w \in \mathbb{C}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

a) $\lim_{A \ni z \to a} f(z) = w$. (vrt. Määritelmä 2.9/muistiinpanot)

b) Aina kun (z_n) on jono joukon $A \setminus \{a\}$ pisteitä, jolle $z_n \to a$, niin pätee

$$f(z_n) \to w.$$

(Huom. Sanotunlaisia jonoja (z_n) on olemassa, koska a on kasautumispiste!)

Tämä täydentää luennolla tarkastellun ja muistiinpanojen luvussa 2 esitetyn lauseen todistuksen.

Ratkaisu: Osoitetaan ensin, että $a \to b$. Jos a pätee, niin määritelmän nojalla jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa $\delta(\epsilon) > 0$ siten, että jos $z \in A \cap B(a, \delta(\epsilon))$, $z \neq a$ niin $\mid f(z) - w \mid < \epsilon$.

Olkoon nyt annettu jono (z_n), jolla $z_n \in A \setminus \{a\}$ kaikilla n ja $z_n \to a$. Olkoon lisäksi $\epsilon > 0$ mielivaltainen. Nyt oletuksesta a seuraa, että on olemassa δ jolle pätee seuraavaa. Kun $\mid z - a \mid < \delta$ niin $\mid f(z) - w \mid < \epsilon$.

Koska $z_n \to a$, niin on olemassa luonnollinen luku N jolla $| z_n - a |< \delta$ kaikilla $n > N$. Mutta tästä seuraa, että $| f(z_n) - w |< \epsilon$ kaikilla $n > N$. Koska $\epsilon > 0$ oli mielivaltainen saadaan että $f(z_n) \to w$. Koska jono (z_n) oli mielivaltainen ehdot täyttävä jono tämä todistaa väitteen.

Osoitetaan seuraavaksi suunta $b \to a$. Tehdään tätä varten vastaoletus, eli oletetaan että a ei päde, ja johdetaan tästä ristiriita kohdan b kanssa.

Oletus että a ei päde tarkoittaa, että on olemassa jokin $\epsilon > 0$ siten että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa piste $z \in A \cap B(a, \delta)$, $z \neq a$, jolle pätee että $| f(z) - w |> \epsilon$. Tällöin erityisesti voidaan valita jokaista luonnollista lukua n kohti kuulasta $B(a, \frac{1}{n})$ piste z_n siten että $z_n \neq a$, $z_n \in A$ ja $| f(z_n) - w |> \epsilon$, missä $\epsilon > 0$ on siis jokin vakio.

Mutta nyt selvästi pisteet z_n muodostavat jonon joka toteuttaa kohdan b ehdot, mutta jolle ei päde $f(z_n) \to w$. Tämä on ristiriita kohdan b kanssa jonka oletimme olevan tosi, siis kohta a ei voi olla epätosi. Siis $b \to a$ ja tämä todistaa tehtävän.