Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 2
20.9.2016

1. Jos $z_0 = \sqrt{3} - i$, kirjoita z napaesityksessä, eli muodossa $z_0 = re^{i\theta}$.

Jos $\arg(z)$ tarkoittaa argumentin päähaara, valitse kulmaksi $\theta = \arg(z_0)$. Määrää z_0:n argumentti myös sille haaralle, jonka arvot ovat välillä $(0, 2\pi)$.

Lopuksi, määrää luku z^{21}.

2. Määrää raja-arvo $\lim_{z\to -2} \frac{z^3+8}{z^2+2z}$.
[Vihje: $8 = 2^3$]

3. Jos $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, onko f:llä (kompleksinen) derivaatta pisteessä $z = 1$?

4. Etsi seuraavien yhtälöiden juuret; anna ratkaisut napaesityksessä $z = re^{i\theta}$ sekä piirrä kuva, josta käy ilmi juurien sijainti kompleksitasossa.

a) $z^7 = -1$ b) $z^5 = 1 - i$

5. Olkoon L suora, joka kulkee pisteen $z = -2$ kautta ja muodostaa kulman α reaaliakselin kanssa. Kirjoita kompleksilukujen avulla kuvaus, joka esittää peilausta suoran L suhteen.

6. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ ja $f : A \to \mathbb{C}$ jokin funktio. Oletamme, että a on joukon A kasautumispiste ja $w \in \mathbb{C}$. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

a) $\lim_{A \ni z \to a} f(z) = w$. (vrt. Määritelmä 2.9/muistiinpanot)

b) Aina kun (z_n) on jono joukon $A \setminus \{a\}$ pisteitä, jolle $z_n \to a$, niin pätee

$$f(z_n) \to w.$$

(Huom. Sanotunlaisia jonoja (z_n) on olemassa, koska a on kasautumispiste!)

Tämä täydentää luennolla tarkastellun ja muistiinpanojen luvussa 2 esitetyn lauseen todistuksen.

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 2
20.9.2016

1. If $z_0 = \sqrt{3} - i$, write z in its polar representation, i.e. in the form $z_0 = re^{i\theta}$.

If $\arg(z)$ denotes the principal branch, choose the angle so that $\theta = \arg(z_0)$. Determine the argument of z_0 also for the branch which has values in the interval $(0, 2\pi)$.

Finally, calculate z^{21}.

2. Determine the limit $\lim_{z \to -2} \frac{z^3+8}{z^2+2z}$.
[Hint: $8 = 2^3$]

3. If $f(z) = |z|^2$, $z \in \mathbb{C}$, does f have a (complex) derivative at $z = 1$?

4. Find the roots for the following equations; give the solutions in the polar representation $z = re^{i\theta}$ and draw a picture explaining how the roots lie in the complex plane.

a) $z^7 = -1$ b) $z^5 = 1 - i$

5. Suppose L is a line going through the point $z = -2$, forming the angle α with real axis. Write down with complex numbers a mapping that represents the reflection with respect to the line L.

6. Suppose $A \subset \mathbb{C}$ and $f : A \to \mathbb{C}$ is a function. We assume that a is an accumulation point of the set A and that $w \in \mathbb{C}$. Show that the following are equivalent:

a) $\lim_{A \ni z \to a} f(z) = w$. (cf. Definition 2.9/lecture notes)

b) If (z_n) is any sequence of points in $A \setminus \{a\}$ such that $z_n \to a$, then we have

$$f(z_n) \to w.$$

(Note: such sequences (z_n) exist since a is an accumulation point of A)