Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 11
13.12.2016

Viikon 28.11.-2.12. materiaaliin perustuvat tehtävät
==

1. Kolmannelle sivulle on piirretty kolme umpinaista polkua γ_j, $j = 1, 2, 3$.
a) Jos $\sigma = \gamma_1 + 2\gamma_2$, montako yhtenäistä komponenttia on joukolla $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$?
b) Merkitse kuhunkin komponenttiin vastaavan kierrosluvun $n(\sigma, a)$ arvo.
c) Samoin, merkitse kuhunkin $\mathbb{C} \setminus |\gamma_3|$:n komponenttiin vastaavan kierrosluvun $n(\gamma_3, a)$ arvo.

Ratkaisu

a: Suoraan laskemalla saadaan 5 komponenttia.

b: Katso kuvasta joka liitteenä.

c: Katso kuvasta joka liitteenä.

2. Olkoon γ kiekon $\{|z| < 2\}$ positiivisesti suunnistettu kehä. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3 + z}\, dz$$

[Vihje: Tässä ja alla muista polkujen deformointi ja Cauchyn lauseet]

Ratkaisu

Huomataan ensin käyttämällä osamurtohajotelmaa, että

$$\frac{e^z}{z^3 + z} = \frac{e^z}{z} - \frac{\frac{1}{2}e^z}{z - i} - \frac{\frac{1}{2}e^z}{z + i}.$$

Tällöin

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3 + z}\, dz = \int_\gamma \frac{e^z}{z} - \frac{\frac{1}{2}e^z}{z - i} - \frac{\frac{1}{2}e^z}{z + i}\, dz.$$

Nyt Nämä integraalit voidaan laskea Cauchyn integraalikaavalla (lause 8.1, muista että pisteen z ei kaavassa tarvitse olla kuulan keskipiste) ja saadaan,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3+z}\,dz = 2\pi i - e^i\pi i - e^{-i}\pi i = 2\pi i(1 - \frac{e^i + e^{-i}}{2}) = 2\pi i(1-\cos 1).$$

Toinen tapa tehdä tehtävä on käyttää polkujen deformointia ja valita pienet kuulat funktion $\frac{e^z}{z^3+z}$ napojen ympärille joiden yli integroi. Tällöin tulee toki varmistua siitä että kierrosluvut näiden napojen suhteen pysyvät samana. Nyt jokaisessa kuulassa voi kirjoittaa $\frac{e^z}{z^3+z} = \frac{e^z}{z(z-i)(z+i)}$ ja käyttää Cauchyn lausetta. Tässä tavassa säästyy osamurtohajotelman teolta, mutta joutuu varmistumaan napojen kierrosluvuista.

3. Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$$

Ratkaisu

Huomataan että yhtälöllä $z^4+1=0$ on ratkaisut $z = e^{\frac{\pi i + 2n}{4}}$ kun $n \in \{0,1,2,3\}$. Ideana on nyt laajentaa integraali kompleksiseksi integraaliksi funktiolle $\frac{1}{z^4+1}$ yli puoliympyrän reunan positiiviseen kiertosuuntaan joka kulkee pisteiden $R, iR, -R$ kautta. Kun annetaan $R \to \infty$ niin integraali yli puoliympyrän reunan reaaliakselilla olevan osan yli lähestyy haluttua integraalia.

Toisaalta polkujen deformointilauseen nojalla tiedämme että integraali yli puoliympyrän kaikilla suurilla R vastaa integroimista yli syklin σ joka koostuu kahdesta pienestä kuulasta (säde pienempi kuin $\frac{1}{3}$) jotka suunnistettu positiivisesti ja joiden keskipisteet ovat $e^{\frac{\pi i}{4}}$ ja $e^{\frac{3\pi i}{4}}$. Tämä pätee sillä funktio $\frac{1}{z^4+1}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}\}$ ja selvästi kierrosluvut pisteiden $\{e^{\frac{\pi i}{4}} e^{\frac{3\pi i}{4}}, e^{\frac{5\pi i}{4}}, e^{\frac{7\pi i}{4}}\}$ suhteen ovat samat sekä alun puoliympyrälle että syklille σ.

Tämän lisäksi tulee vielä osata arvioida yli puoliympyrän kaaren tapahtuvaa integrointia, kun $R \to \infty$, jotta voidaan saada tietoa integraalista yli reaaliakselin.

Lasketaan ensin integraalin arvo suurilla R. Tätä varten riittää laskea edellä mainittujen kahden pienen kuulan integraalit. Merkataan näiden kuulien positiivisesti suunnistettuja reunoja γ_1 ja γ_2. Pisteen $e^{\frac{\pi i}{4}}$ ympäristössä voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z^2+i)(z+e^{\frac{\pi i}{4}})} \cdot \frac{1}{z+e^{\frac{5i\pi}{4}}},$$

missä ensimmäinen osa on analyyttinen pienessä kuulassa. Tällöin Cauchyn integraalikaavan nojalla

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^4+1} = \frac{2\pi i}{(e^{\frac{\pi i}{2}}+i)(e^{\frac{\pi i}{4}}+e^{\frac{\pi i}{4}})} = \frac{\pi}{\sqrt{2}(1+i)} = \frac{1}{2}\frac{\pi - i\pi}{\sqrt{2}}.$$

Täysin vastaavasti voidaan pisteen $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ ympäristössä kirjoittaa

$$\frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z^2-i)(z+e^{\frac{3\pi i}{4}})} \cdot \frac{1}{z+e^{\frac{7i\pi}{4}}},$$

missä jälleen ensimmäinen osa on analyyttinen pisteen $e^{\frac{3\pi i}{4}}$ ympäristössä. Täsmälleen samoin laskemalla kuin edellisen kuulan kohdalla saadaan

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{2}\frac{\pi + i\pi}{\sqrt{2}}.$$

Tällöin siis saadaan

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

kun γ_R on polku yli puoliympyrän ja R mielivaltainen suuri reaaliluku.

Nyt tulee vielä arvioida integraalia pitkin ympyräkaarta kun $R \to \infty$. Huomataan ensin, että ympyräkaaren pituus on πR ja että kaikille z jotka kuuluvat kyseiselle ympyräkaarelle pätee $\frac{1}{|z^4+1|} \leq \frac{1}{R^4-1}$.

Nyt merkitään ympyräkaarta θ_R ja voidaan arvioida

$$\left| \int_{\theta_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \right| \leq \frac{1}{R^4-1}\pi R$$

ja selvästi pätee

$$\frac{\pi R}{R^4-1} \to 0$$

kun $R \to \infty$.

Eli nyt kaikilla suurilla R pätee

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz = \int_{\theta_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz + \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Nyt kun annetaan $R \to \infty$ pätee siis

$$\int_{\theta_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \to 0,$$

joten

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

mikä osoittaa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

4. a) Laske integraali

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i)^2} dx$$

soveltamalla Cauchyn integraalilausetta, integrointia yli sopivien apu-suorakaiteiden sekä tietoa, että $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

b) Määrää a)-kohdan avulla integraali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx$

Ratkaisu

a: Koska e^{-z^2} on analyyttinen koko tasossa Cauchyn lauseen globaali muoto kertoo, että integraali yli jokaisen suorakaiteen, jonka päätypisteet ovat R, $-R$, $R+i$ ja $-R+i$ ja joka kierretään vastapäivään, on nolla. Kun $R \to \infty$ on helppo nähdä, että integraali yli suoran joka yhdistää pisteet $R, R+i$ suppenee kohti nollaa, sillä

$$\left| \int_{R}^{R+i} e^{-z^2}\, dz \right| \leq e^{-R^2+1}.$$

Täysin samoin nähdään, että integraali yli suoran joka yhdistää pisteet $-R$ ja $-R+i$ suppenee kohti nollaa. Vastaavasti nähdään, että integraali

$$\int_{-R}^{R} e^{-z^2}\, dz$$

suppenee kohti integraalia

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz,$$

sillä funktio e^{-t^2} suppenee kohti nollaa hyvin nopeasti kun $|t| \to \infty$. Täten integraali

$$\int_{-R+i}^{R+i} e^{-z^2}\, dz = \int_{-R}^{R} e^{-(x+i)^2}$$

suppenee kohti arvoa $\sqrt{\pi}$. Ja täten

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i)^2} = \sqrt{\pi}.$$

b: Lasketaan suoraan

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x)\, dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{e^{2xi} + e^{-2xi}}{2}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e} e^{-(x-i)^2}\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2e} e^{-(x+i)^2}\, dx.\end{aligned}$$

Täysin samoin kuin kohdassa a voidaan laskea

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-i)^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

ja käyttäen tätä sekä a kohdan laskua saadaan, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e} + \frac{\sqrt{\pi}}{2e} = \frac{\sqrt{\pi}}{e}.$$

Viikon 5.12.-9.12. materiaaliin perustuvat tehtävät
==

5. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ *yhdesti yhtenäinen* alue ja α piste sen ulkopuolella, $\alpha \notin A$. Osoita että silloin

$$z \mapsto \log(z - \alpha)$$

voidaan määritellä A:n analyyttisenä funktiona. Toisin sanoen, löytyy analyyttinen $f : A \to \mathbb{C}$ siten että $e^{f(z)} = z - \alpha$ kaikilla $z \in A$.

[Vihje: Hyödynnä Harjoitus 10/tehtävän 5 ideoita.]

Ratkaisu

Edetään kuteen vihjeessä annetussa harjoitustehtävässä. Kuvaus $f(z) = z - \alpha$ on analyyttinen alueessa A ja erisuuri kuin nolla. Täten $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-\alpha}$ on analyyttinen alueessa A. Tällöin sillä on integraalifunktio g, joka on vakiota vaille yksikäsitteinen, alueeessa A. Tutkitaan nyt kuvauksen $(z - a)e^{-g(z)}$ derivaattaa ja osoitetaan, että kyseinen kuvaus on vakio. Lasketaan

$$D((z - \alpha)e^{-g(z)}) = e^{-g(z)} + (z - \alpha)(-g'(z))e^{-g(z)} = 0,$$

missä on käytetty tietoa $g'(z) = \frac{1}{z-\alpha}$. Tällöin pätee

$$(z - \alpha)e^{-g(z)} = c,$$

missä c on erisuuri kuin nolla sillä $z - \alpha$ ja $e^{-g(z)}$ ovat erisuuria kuin nolla kaikilla $z \in A$. Valitaan nyt integraalifunktion g vakiotermi siten, että $c = 1$. Tällöin saadaan

$$z - \alpha = e^{g(z)},$$

eli saadaan haluttu logaritmin haara.

6. Määrää residyt $Res(f, 0)$, kun $f(z)$ on funktio

$$a)\ \frac{z}{\sin z} \qquad b)\ \frac{\cos z}{z(z^2 - 1)} \qquad c)\ \frac{1}{1 - \cos z} \qquad d)\ e^{-1/z^2}$$

Millainen erikoispiste origo on kullekin yo. funktiolle ?

Ratkaisu:

a: Selvästi funktio on rajoitettu origon ympäristössä (nähdään esimerkiksi käyttäen sinin sarjakehitelmää), eli origo on poistuva erikoispiste. Joten täten residy on nolla.

b: Kosini on rajoitettu origon ympäristössä, joten origo on selkeästi ensimmäisen kertaluvun napa kyseiselle funktiolle. Tällöin residy saadaan raja-arvona

$$\lim_{z\to 0} z\frac{\cos z}{z(z^2-1)} = -1.$$

c: Lasketaan Kosinin sarjakehitelmää käyttäen $1 - cos(z) = \frac{1}{2}z^2 + O(z^4)$. Täten

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\cos(z)} &= \frac{1}{\frac{1}{2}z^2 - az^4 + O(z^6)} = \frac{2}{z^2}\cdot\frac{1}{1-a_1z^2+O(z^4)} \\ &= \frac{2}{z^2}\left(1 + a_1z^2 + O(z^4) + (a_1z^2 + O(z^4))^2 + \cdots\right),\end{aligned}$$

josta nähdään, että Laurentin sarjan kerroin a_{-1} on 0. Siis residy on 0.

d: Eksponenttifunktion sarjakehitelmän avulla nähdään, että

$$e^{\frac{-1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{z^2} + O\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Joten residy on nolla, sillä kertoimem a_{-1} on oltava nolla.

7. Määrää integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

Ratkaisu

Ratkaistaan ensin kuvauksen $f(z) = z^2 + z + 1$ nollakohdat $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ja $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$, jotka saadaan toisen asteen ratkaisukaavasta. Olkoon nyt γ pisteiden R, iR ja $-R$ kautta kulkeva puoliympyrän reuna suunnistettuna positiivisesti. Residy lauseen nojalla kyseisen kuvauksen integraali tämän käyrän yli on $2\pi i Res(f, z_1)$. (Sillä kierrosluku toisen navan yli on nolla)

Lasketaan siis kyseinen Residy. Koska selkeästi kyseessä on ensimmäisen kertaluvun napa voidaan laskea

$$\lim_{z\to z_1} \frac{z-z_1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{\sqrt{3}i}.$$

Täysin vastaavalla päättelyllä kuin tehtävässä 3 saadaan, että integraali yli puoliympyrän kaaren lähestyy nollaa kun $R\to\infty$. (Sillä kaaren pituus kasvaa kuten cR ja kuvauksen moduli pienenee kuten cR^{-2})

Täten saadaan rajalla, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8. Jos $f : \partial D(z_0,r) \to \mathbb{C}$ on jatkuva ympyrän kehällä, asetetaan ympyrän *ulkopuolella*

$$g(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad |z-z_0| > r.$$

Osoita, että silloin $g(z)$ voidaan esittää negatiivisten potenssien sarjana

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^{-n}, \qquad |z-z_0| > r,$$

missä sarja suppenee tasaisesti kaikissa joukoissa $D = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0| \geq R\}$ kun $R > r$.

[Vihje: $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{z_o-z}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$.]

Ratkaisu

Lasketaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta-z} &= \frac{1}{z_0-z}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}} \\
&= \frac{1}{z_0-z}\left(1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+\cdots+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^N+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\right)\right) \\
&= \frac{-1}{z-z_0} - \frac{\zeta-z_0}{(z-z_0)^2} - \cdots - \frac{(\zeta-z_0)^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1}\frac{1}{\zeta-z}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä nyt integraalin sisään ja lasketaan

$$\int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta = \sum_{n=1}^{N+1}\frac{a_n}{(z-z_0)^n} + \int_{\partial D(z_0,r)}\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^{N+1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

missä kertoimet

$$a_n = \int_{\partial D(z_0,r)} -(\zeta - z_0)^{j-1} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Koska f on jatkuva, $\partial D(z_0, r)$ on kompakti, r on jokin kiinteä luku ja $|z-\zeta| > c$ voidaan arvioida

$$\left| \int_{\partial D(z_0,r)} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{N+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leq c \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right|^{N+1}.$$

Mutta nyt kaikille z siten että $|z - z_0| > r$ pätee, että

$$c \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right|^{N+1} \tag{1}$$

suppenee kohti nollaa kun $N \to \infty$. Täten kaikilla z joille $|z - z_0| > r$ voidaan ottaa raja-arvo $N \to \infty$ ja saadaan

$$g(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n},$$

kuten haluttiin. Lisäksi mielivaltaisessa alueessa $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq R\}$, missä $R > r$, pätee että (1) suppenee tasaisesti kohti nollaa. Täten myös $g(z)$:n sarjakehitelmä suppenee tasaisesti kyseisessä alueessa.

$\sigma = \gamma_1 + 2\gamma_2$