Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 11
13.12.2016

Viikon 28.11.-2.12. materiaaliin perustuvat tehtävät
==

1. Kolmannelle sivulle on piirretty kolme umpinaista polkua γ_j, $j = 1, 2, 3$.

a) Jos $\sigma = \gamma_1 + 2\gamma_2$, montako yhtenäistä komponenttia on joukolla $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$?

b) Merkitse kuhunkin komponenttiin vastaavan kierrosluvun $n(\sigma, a)$ arvo.

c) Samoin, merkitse kuhunkin $\mathbb{C} \setminus |\gamma_3|$:n komponenttiin vastaavan kierrosluvun $n(\gamma_3, a)$ arvo.

2. Olkoon γ kiekon $\{|z| < 2\}$ positiivisesti suunnistettu kehä. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3 + z}\, dz$$

[Vihje: Tässä ja alla muista polkujen deformointi ja Cauchyn lauseet]

3. Määrää integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

4. a) Laske integraali

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i)^2} dx$$

soveltamalla Cauchyn integraalilausetta, integrointia yli sopivien apu-suorakaiteiden sekä tietoa, että $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

b) Määrää a)-kohdan avulla integraali $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx$

Viikon 5.12.-9.12. materiaaliin perustuvat tehtävät
===

5. Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ *yhdesti yhtenäinen* alue ja α piste sen ulkopuolella, $\alpha \notin A$. Osoita että silloin

$$z \mapsto \log(z - \alpha)$$

voidaan määritellä A:n analyyttisenä funktiona. Toisin sanoen, löytyy analyyttinen $f : A \to \mathbb{C}$ siten että $e^{f(z)} = z - \alpha$ kaikilla $z \in A$.

[Vihje: Hyödynnä Harjoitus 10/tehtävän 5 ideoita.]

6. Määrää residyt $Res(f, 0)$, kun $f(z)$ on funktio

$$a)\ \frac{z}{\sin z} \qquad b)\ \frac{\cos z}{z(z^2-1)} \qquad c)\ \frac{1}{1-\cos z} \qquad d)\ e^{-1/z^2}$$

Millainen erikoispiste origo on kullekin yo. funktiolle ?

7. Määrää integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$

8. Jos $f : \partial D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ on jatkuva ympyrän kehällä, asetetaan ympyrän *ulkopuolella*

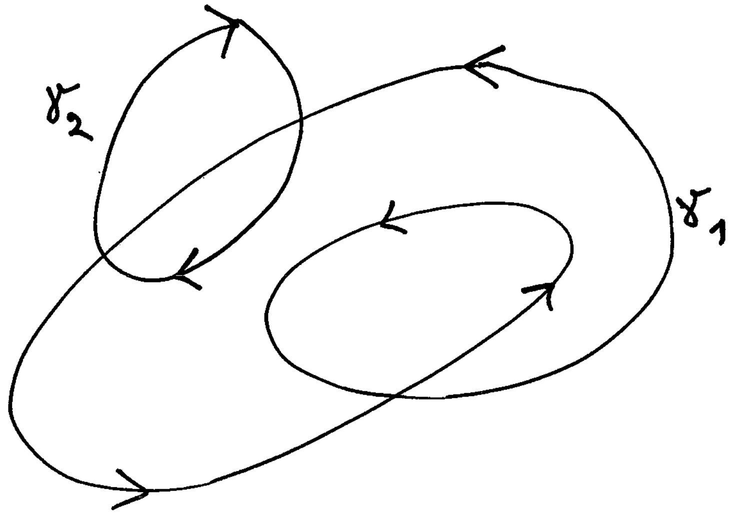
$$g(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad |z - z_0| > r.$$

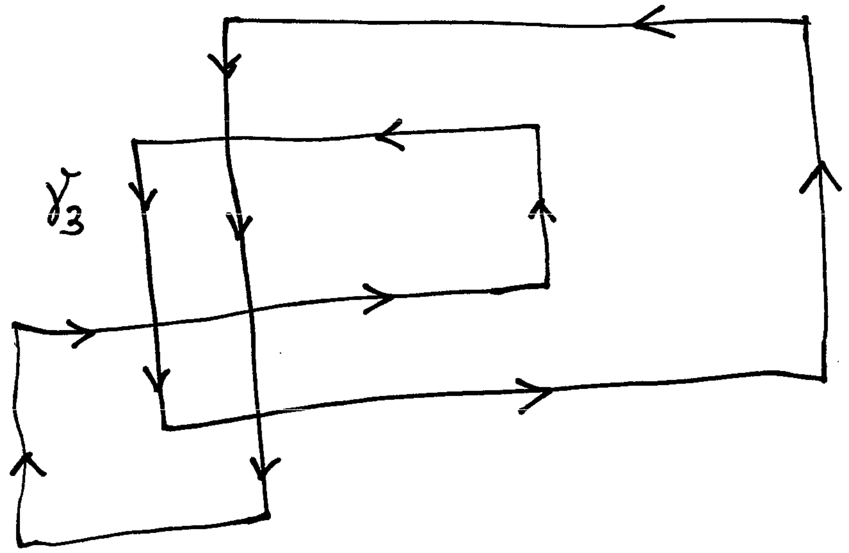
Osoita, että silloin $g(z)$ voidaan esittää negatiivisten potenssien sarjana

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}, \qquad |z - z_0| > r,$$

missä sarja suppenee tasaisesti kaikissa joukoissa $D^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq R\}$, kun $R > r$.

[Vihje: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z_o - z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$; kertoimet $a_n = -\int_{\partial D(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta$]


γ_2
γ_1


γ_3

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 11
13.12.2016

No exercises on Dec.6. (Independence day)
Note that the exercises below cover material from two weeks.

Material for the week Nov.28. - Dec. 2.
===========================

1. On the last page we have drawn three closed curves γ_j, $j = 1, 2, 3$.
   a) If $\sigma = \gamma_1 + 2\gamma_2$, how many connected components does the set $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ have ?
   b) Write in each component the corresponding rotation number $n(\sigma, a)$.
   c) Similarly, write in each component of $\mathbb{C} \setminus |\gamma_3|$ the corresponding rotation number $n(\gamma_3, a)$.

2. Let γ be the (positively oriented) boundary of the disc $\{|z| < 2\}$. Determine the integral

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3 + z}\, dz$$

[Hint: Here and below remember Cauchy and the deformation of paths.]

3. Determine the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

4. a) Determine the integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i)^2} dx$$

by applying Cauchy's integral theorem, integration over suitable auxiliary rectangles and the fact that $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

   b) Use part a) to determine the integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(2x) dx$

Material for the week Dec. 5. - Dec. 9.
==========================

5. Suppose $A \subset \mathbb{C}$ is a *simply connected* domain and $\alpha \notin A$. Show that then

$$z \mapsto \log(z - \alpha)$$

can be defined as a function analytic in A. That is, one can find an analytic $f : A \to \mathbb{C}$ such that $e^{f(z)} = z - \alpha$ for every $z \in A$.

[Hint: Make use of ideas from Exercises 10/Problem 5.]

6. Determine the residues $Res(f, 0)$ for the function

$$a)\ \frac{z}{\sin z} \qquad b)\ \frac{\cos z}{z(z^2-1)} \qquad c)\ \frac{1}{1-\cos z} \qquad d)\ e^{-1/z^2}$$

For each of the above functions, determine the type of singularity it has at $z = 0$.

7. Determine the integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, dx$

8. If $f : \partial D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ is continuous on a circle, define *outside* the circle

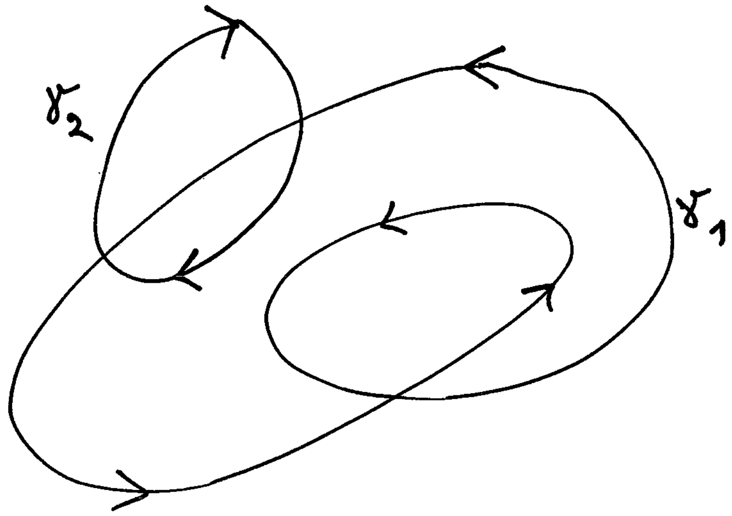
$$g(z) = \int_{\partial D(z_0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}, \qquad |z - z_0| > r.$$

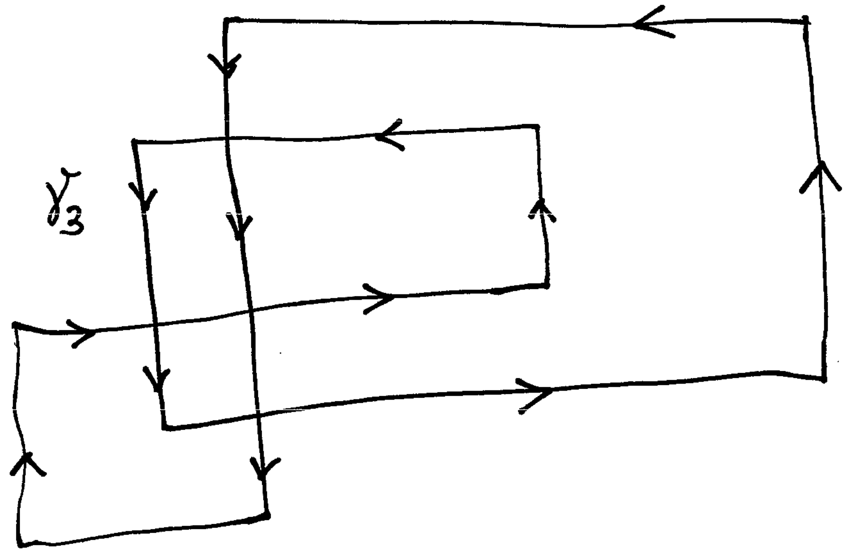
Show that then $g(z)$ can be represented as a series of negative powers

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^{-n}, \qquad |z - z_0| > r,$$

where the series converges uniformly in each set $D^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \geq R\}$, where $R > r$.

[Hint: $\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z_o - z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}$; the coefficient $a_n = -\int_{\partial D(z_0,r)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta$]


γ_2
γ_1


γ_3