

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 10
29.11.2016

1. Laske integraali

$$\int_{\sigma} \frac{e^z}{z(z-3)^2} dz,$$

syklille $\sigma = 3\gamma_1 - 2\gamma_2$, kun $\gamma_1(t) = 3 + e^{2\pi it}$ ja $\gamma_2(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0, 1]$.

Ratkaisu

Lasketaan ensin integraali yli polun γ_1 . Tätä varten valitaan $f(z) = \frac{e^z}{z}$ ja lasketaan $f'(3) = \frac{2e^3}{9}$. Tällöin Cauchyn lauseen differentiaalimuodon avulla saadaan

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z-3)^2} dz = \frac{4\pi i e^3}{9}.$$

Lasketaan sitten integraali yli polun γ_2 käyttäen normaalia Cauchyn lausetta ja kuvausta $g(z) = \frac{e^z}{(z-3)^2}$, joka analyyttinen kuulassa $B(0, 2)$. Saadaan

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z-3)^2} dz = \frac{2\pi i}{9}.$$

Tällöin integraali yli syklin σ on

$$\int_{\sigma} \frac{e^z}{z(z-3)^2} dz = \frac{4\pi i e^3}{9} - \frac{2\pi i}{9}.$$

2. a) Olkoot f ja g analyyttisiä funktiota koko tasossa \mathbb{C} . Oletetaan, että

$$|f(z)| < |g(z)| \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että $f(z) = \lambda g(z)$ jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Olkoon f kuten yllä. Oletetaan, että $|f'(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Mitä voit sanoa funktiosta f ?

[Vihje: Liouville.] Ratkaisu.

a: Tutkitaan funktiota $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$. Nyt $h(z)$ on analyyttinen koko tasossa, sillä sekä f että g ovat analyyttisiä ja koska ehdosta $|f(z)| < |g(z)|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$ seuraa että $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Mutta nyt pätee $|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < 1$, joten Liouvillen lauseen nojalla $h(z) = \lambda$ jollain $\lambda \in \mathbb{C}$. Mutta tästä seuraa $f(z) = \lambda g(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

b: Lauseen 8.27 b-kohdan nojalla ehdosta $|f'(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$ seuraa että $f'(z) = az + b$. Nyt koska origossa $f'(z) = 0$ pätee että $f'(z) = az$ ja koska $|f'(1)| \leq 1$ pätee $|a| \leq 1$.

Tällöin $f(z) = \frac{a}{2}z^2 + c$, missä $c \in \mathbb{C}$.

3. a) Olkoon $f(z)$ analyyttinen yksikkökiekossa $D(0, 1)$. Jos $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ jokaisella $z \in D(0, 1)$, osoita että f on vakio.

b) Määrä funktion e^{z^2} suurin arvo suljetussa kiekossa $\overline{D(0, 1)}$.

Ratkaisu

a: Maksimiperiaatteen nojalla kaikilla kiekkoilla $B(0, r)$, $0 < r < 1$, pätee että $|f|$ saa suurimman arvonsa reunalla jossain pisteessä z_r . Toisaalta oletuksen nojalla pätee $|f(z_r^2)| \geq |f(z_r)|$ vaikka $|z_r^2| < |z_r|$, joten funktion moduli saa vähintään yhtäsuuren arvon myös kiekon sisällä. Tällöin siis funktio f on vakio kiekossa $B(0, r)$ ja analyyttisen funktion yksikäsitteisyyden nojalla se on vakio koko kiekossa $B(0, 1)$.

b: Maksimiperiaatteen nojalla $|e^{z^2}|$ saa maksimiarvonsa kiekon $B(0, 1)$ reunalla. Tutkitaan siis $|e^{z^2}|$ maksimia kun $z = e^{i\phi}$, $\phi \in [0, 2\pi)$. Nyt $|e^{e^{i\phi}}| = e^{\operatorname{Re}(e^{i\phi})} \leq e^{|e^{i\phi}|} = e$. Siis riittää löytää jokin piste jossa $e^{e^{i\phi}} = e$, mutta nyt valitaan $\phi = 0$ ja huomataan että tämä pätee. Siis funktion e^{z^2} supremum kiekossa $B(0, 1)$ on e .

4. Olkoon $f(z)$ kiekon $D(0, 1)$ analyyttinen funktio, jolle $fD(0, 1) \subset D(0, 1)$. Osoita, että $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$.

[Vihje: Luennoilla tapaus $f(0) = 0$; palauta tähän HT 8/tehtävän 4 Möbiuskuvauksilla.]

Ratkaisu

Voidaan olettaa, että $f(0) \neq 0$, sillä muutoin väite seuraa Schwartzin lemmasta. Valitaan Möbius kuvaus

$$\varphi(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}$$

ja huomataan, että $\varphi \circ f$ on analyyttinen kuvaus yksikkökuulalta itselleen ja $\varphi \circ f(0) = 0$. Tällöin huomautus 8,34 nojalla (eli käytännössä Schwartzin lemmän avulla) saadaan, että

$$\left| \frac{d}{dz} \varphi \circ f(0) \right| \leq 1.$$

Mutta nyt ketjusääntöä käyttäen saadaan

$$\left| \frac{d}{dz} \varphi \circ f(0) \right| = |f'(0) \varphi'(f(0))| = |f'(0)| \frac{1}{1 - |f(0)|^2},$$

joka yhdessä Schwartzin lemmasta saadun rajan kanssa antaa halutun tuloksen.

5. Olkoon $D = D(0, 1)$ yksikkökierros ja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ analyyttinen funktio jolle $f(z) \neq 0$ jokaisella $z \in D$. Näytä että voit määritellä logaritmin (haaran) $\ln f(z)$ analyyttisenä funktiona kiekossa D .

[Vihje: Sinun tulee löytää *analyyttinen* funktio $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ jolle $e^{g(z)} = f(z)$. Tähän: etsi luentojen tulosten avulla f'/f :lle integraalifunktio g , ja näytä, että fe^{-g} on vakio.] Ratkaisu.

Edetään vihjeen mukaisesti ja tarkastellaan funktiota $\frac{f'(z)}{f(z)}$ alueessa D . Koska oletuksen nojalla $f(z) \neq 0$ kun $z \in D$ ja f analyyttinen huomataan että myös $\frac{f'(z)}{f(z)}$ on analyyttinen alueessa D . Tällöin funktiolla $\frac{f'(z)}{f(z)}$ on integraalifunktio g alueessa D ja tässä alueessa pätee $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

Osoitetaan nyt, että $h(z) = f(z) \cdot e^{-g(z)}$ on vakiofunktio alueessa D . Tätä varten tutkitaan sen derivaattaa,

$$h'(z) = f'(z)e^{-g(z)} + f(z) \cdot (-g'(z)e^{-g(z)}) = f'(z)e^{-g(z)} - f'(z)e^{-g(z)} = 0,$$

missä on käytetty tietoa $g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Koska tämä pätee kaikilla $z \in D$, tästä seuraa että $fe^{-g(z)}$ on vakio. Koska g on integraalifunktio se on vakiota vaille yksikäsitteinen, joten voidaan valita sellainen integraalifunktio g , että $f(z)e^{-g(z)} = 1$ kaikilla $z \in A$. Tällöin saadaan että $f(z) = e^{g(z)}$ ja g analyyttinen alueessa D , eli g on haluttu logaritmin haara alueessa D .