Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
Harjoitus 10
29.11.2016

1. Laske integraali

$$\int_{\sigma} \frac{e^z}{z(z-3)^2}\, dz,$$

syklille $\sigma = 3\gamma_1 - 2\gamma_2$, kun $\gamma_1(t) = 3 + e^{2\pi it}$ ja $\gamma_2(t) = e^{2\pi it}$, $t \in [0,1]$.

2. a) Olkoot f ja g analyyttisiä funktiota koko tasossa $\mathbb{C}$. Oletetaan, että

$$|f(z)| < |g(z)| \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

Osoita, että $f(z) = \lambda g(z)$ jollakin $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Olkoon f kuten yllä. Oletetaan, että $|f'(z)| \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Mitä voit sanoa funktiosta f ?

[Vihje: Liouville.]

3. a) Olkoon $f(z)$ analyyttinen yksikkökiekossa $D(0,1)$. Jos $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ jokaisella $z \in D(0,1)$, osoita että f on vakio.

b) Määrää funktion e^{z^2} suurin arvo suljetussa kiekossa $\overline{D(0,1)}$.

4. Olkoon $f(z)$ kiekon $D(0,1)$ analyyttinen funktio, jolle $fD(0,1) \subset D(0,1)$. Osoita, että $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$.

[Vihje: Luennoilla tapaus $f(0) = 0$; palauta tähän HT 8/tehtävän 4 Möbiuskuvauksilla.]

5. Olkoon $D = D(0,1)$ yksikkökiekko ja $f : D \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio jolle $f(z) \neq 0$ jokaisella $z \in D$. Näytä että voit määritellä logaritmin (haaran) $\ln f(z)$ analyyttisenä funktiona kiekossa D.

[Vihje: Sinun tulee löytää *analyyttinen* funktio $g : D \to \mathbb{C}$ jolle $e^{g(z)} = f(z)$. Tähän: etsi luentojen tulosten avulla f'/f:lle integraalifunktio g, ja näytä, että fe^{-g} on vakio.]

Department of Mathematics and Statistics
Complex Analysis I
Exercises 10
29.11.2016

1. Determine the integral
$$\int_\sigma \frac{e^z}{z(z-3)^2}\,dz,$$
for the cycle $\sigma = 3\gamma_1 - 2\gamma_2$, when $\gamma_1(t) = 3 + e^{2\pi i t}$ and $\gamma_2(t) = e^{2\pi i t}$, $t \in [0,1]$.

2. a) Suppose f and g are analytic in $\mathbb{C}$. Assume that
$$|f(z)| < |g(z)| \qquad \text{for every } z \in \mathbb{C}.$$
Show that $f(z) = \lambda g(z)$ for some $\lambda \in \mathbb{C}$.

b) Let f be analytic in $\mathbb{C}$. Assume that $|f'(z)| \leq |z|$ for every $z \in \mathbb{C}$. What can you say of the function f ?

[Hint: Liouville.]

3. a) Suppose $f(z)$ is analytic in the unit disc $D(0,1)$. If $|f(z^2)| \geq |f(z)|$ for every $z \in D(0,1)$, show that f is constant.

b) Determine the largest value of e^{z^2} in the closed disc $\overline{D(0,1)}$.

4. Suppose $f(z)$ is a function analytic in $D(0,1)$, such that $fD(0,1) \subset D(0,1)$. Show that $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$.

[Hint: The case $f(0) = 0$ was discussed in the lectures; reduce to that with the Möbius transforms of Exercises 8/problem 4.]

5. Suppose $D = D(0,1)$ is the unit disc and $f : D \to \mathbb{C}$ is an analytic function, such that $f(z) \neq 0$ for every $z \in D$. Show that you can define (branch of) logarithm $\ln f(z)$ as a function analytic in D.

[Hint: You need to find an *analytic* function $g : D \to \mathbb{C}$ for which $e^{g(z)} = f(z)$. For this: use results from lectures to find an integral function g for f'/f, and show that fe^{-g} is constant.]