

**Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Kompleksianalyysi I**  
**Harjoitus 1**  
**13.9.2016**

1. a) Jos  $z, w \in \mathbb{C}$ , näytä että  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$ .  
b) Laske kompleksiluvun  $(2 - i)(4 + 3i)^{-3}$  reaali- ja imaginääriosat.
2. Laske luvun  $z = \frac{3-3i}{-1-\sqrt{3}i}$  argumentti sekä määrää  $z$ :n käänteisluvun imaginääriosat.
3. Määrää  $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{11}$ .
4. Laske luvusta  $z = (\sqrt{3} - i)^5$  moduli (eli itseisarvo) sekä argumentti (eli vaihekulma), ja etsi sen napaesitys.
5. Minkä geometrisen tasojoukon muodostavat ne pisteet  $z \in \mathbb{C}$  joille
  - a)  $|z - a| = R, \quad a \in \mathbb{C}, R > 0$
  - b)  $\operatorname{Re} z = 2016$
  - c)  $\operatorname{Re}(e^{i\phi}z) = 0 \quad (\phi \in \mathbb{R} \text{ vakio})$
  - d)  $\operatorname{Im} z > 2$
  - e)  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ .
6. Esitä  $\sin^3 \theta$  funktioiden  $\sin(\theta)$  ja  $\sin(3\theta)$  avulla, esimerkiksi de Moivre'n kaavoja käyttäen.

**Department of Mathematics and Statistics**  
**Complex Analysis I**  
**Exercises 1**  
**13.9.2016**

1. a) If  $z, w \in \mathbb{C}$ , show that  $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$ .  
b) Determine the real and imaginary part of the complex number  $(2 - i)(4 + 3i)^{-3}$ .
2. Determine the argument of  $z = \frac{3-3i}{-1-\sqrt{3}i}$ . Determine also the imaginary part of the inverse of  $z$ .
3. Determine  $\left(\frac{1+i}{i-1}\right)^{11}$ .
4. Calculate the modulus and argument of  $z = (\sqrt{3} - i)^5$ , and represent it in the polar form.
5. Which geometric planar set is formed by those points  $z \in \mathbb{C}$ , for which
  - a)  $|z - a| = R$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $R > 0$
  - b)  $\operatorname{Re} z = 2016$
  - c)  $\operatorname{Re}(e^{i\phi}z) = 0$  ( $\phi \in \mathbb{R}$  constant)
  - d)  $\operatorname{Im} z > 2$
  - e)  $\frac{1}{z} = \bar{z}$ .
6. Represent  $\sin^3 \theta$  in terms of the functions  $\sin(\theta)$  ja  $\sin(3\theta)$ , for instance by using De Moivre's formulae.