Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I
2. Kurssikoe
15.12.2016

Laske **neljä** seuraavista tehtävistä.

1. Määrää seuraavien integraalien arvot (perustelut!).

a) $\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz, \qquad \gamma(t) = (1+t^2)e^{i3\pi t^{1/2}}, \quad t \in [0,1].$

b) $\int_\gamma \sin(z^3)\,dz, \qquad \gamma(t) = 1 + e^{2\pi i t}, \quad t \in [0,1].$

Ratkaisu

a: Funktiolla $f(z) = \frac{1}{z^2}$ on alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ integraalifunktio $F(z) = \frac{-1}{z}$. Tällöin integraali yli kyseisen polun (joka ei sisällä origoa) voidaan laskea muodossa

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2}\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = \frac{-1}{2e^{3\pi i}} + 1 = \frac{3}{2}.$$

b: Funktio $f(z) = \sin(z^3)$ on analyyttinen koko tasossa ja käyrä γ on umpinainen paloittain C^1 käyrä. Täten

$$\int_\gamma \sin(z^3)\,dz = 0.$$

2. a) Etsi Möbiuskuvaus $f(z)$ joka kuvaa puolitason $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : Re\ z > 0\}$ joukolle $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Tässä $\mathbb{D} = D(0,1)$ on yksikkökiekko.

b) Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ alue ja $f : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ analyyttinen funktio, joka ei ole vakio. Osoita, että f:llä ei ole lokaalia minimiä, eli pistettä $z_0 \in A$, jolle $|f(z_0)| = \inf\{|f(z)| : z \in D(z_0, r) \subset A\}$.

Ratkaisu

a: Valitaan Möbius kuvaus

$$f(z) = \frac{z+1}{-z+1}$$

ja huomataan, että $f(0)=1$, $f(i)=i$ ja $f(-i)=-i$. Koska Möbius kuvaus kuvaa suorat joko suoriksi tai ympyröiksi, niin nähdään että f kuvaa imaginääriakselin yksikkökiekolle. Lisäksi koska $f(1)=\infty$ nähdään, että haluttu puolitaso kuvautuu yksikkökiekon ulkopuoleksi.

b: Koska f analyyttinen, ei vakio ja erisuuri kuin nolla, niin kuvaus $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ on analyyttinen ei vakiokuvaus alueessa A. Tällöin maksimiperiaatteen nojalla kuvauksella g ei voi olla lokaalia maksimia, eli pistettä $z_0 \in A$ ja kuulaa $B(z_0,r) \subset A$ siten, että $g(z_0) \geq g(z)$, kun $z \in B(z_0,r)$. Mutta tästä seuraa, että ei voi olla pistettä z_0 ja kuulaa $B(z_0,r) \subset A$ siten, että $f(z_0) \leq f(z)$ kun $z \in B(z_0,r)$. Siis kuvauksella f ei voi olla lokaalia minimiä.

3. Muotoile ja todista Schwarzin lemma.

Schwarzin lemman muotoilu ja todistus on kurssimateriaalin lause 8.33.

4. Mikä integraalin $\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz$ arvo, kun $\gamma(t)=1+re^{2\pi it}$, $0\leq t\leq 1$, missä

a) $r=1/3$, b) $r=2$, c) $r=9$.

Perustele vastauksesi.

Ratkaisu

a: Tässä tapauksessa γ on kuulan $B\left(1,\frac{1}{3}\right)$ reuna ja nähdään, että kuvaus $f(z)=\frac{e^z}{z(z+2i)}$ on analyyttinen jopa kuulassa $B\left(1,\frac{1}{2}\right)$. Tällöin integraali yli suljetun paloittain C^1 polun yli on nolla.

b: Kuvaus $g(z)=\frac{e^z}{z+2i}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$ ja γ on kuulan $B(1,2)$ reuna, ja $\bar{B}\subset\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$. Täten voidaan käyttää Cauchyn integraalikaavaa ja laskea

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz = 2\pi i g(0) = \pi.$$

c: Nyt molemmat kuvauksen f navat kuuluvat integroitavan polun sisään, joten käytetään polkujen deformointia. Siis integraali yli polun γ on sama kuin integraali yli syklin johon kuuluu kaksi positiivisesti suunnistettua kiekon reunaa γ_1 ja γ_2, missä kiekkojen keskipisteet ovat origossa ja pisteessä $-2i$ ja joiden säteet ovat $\frac{1}{2}$. Täten

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz.$$

Integraali yli polun γ_1 on laskettu kohdassa b, joten jäljelle jää laskea integraali yli polun γ_2 käyttäen Cauchyn integraalikaavaa ja tietoa, että $\frac{e^z}{z}$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Saadaan

$$\int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz = 2\pi i \frac{e^{-2i}}{-2i},$$

ja täten

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2i)}\,dz = \pi(1-e^{2i}).$$

5. Laske integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx$.

Ratkaisu

Ratkaistaan ensin yhtälön z^2-4z+5 nollakohdat toisen asteen yhtälön avulla, jolloin saadaan juuret $z_1 = 2+i$ ja $z_2 = 2-i$. Kuvauksella $f(z) = \frac{1}{z^2-4z+5}$ on siis ensimmäisen kertaluvun navat näissä pisteissä. Tutkitaan nyt kuvauksen $f(z)$ integraalia yli puoliympyrän kaaren γ, joka kulkee pisteiden R, $-R$ ja iR kautta. Residy lauseen nojalla tämä integraali saa arvon

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-4z+5}\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 2+i).$$

Lasketaan nyt kyseinen Residy raja-arvon avulla

$$\lim_{z\to 2+i} \frac{(z-2+i)}{z^2-4z+5} = \lim_{z\to 2+i} \frac{1}{z-(2-i)} = \frac{1}{2i}.$$

Täten siis saadaan

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-4z+5}\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 2+i) = \pi.$$

Seuraavaksi huomataan, että integraali yli ympyräkaaren joka lähtee pisteestä R ja päättyy pisteeseen $-R$ suppenee kohti nollaa kun $R \to \infty$. Tämä pätee, sillä kaaren pituus kasvaa kuten cR, mutta kuvauksen f moduli pienenee kuten cR^{-2}, kun $R \to \infty$. Täten rajalla saadaan halutuksi integraaliksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \, dx = \pi.$$