Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I

1. Kurssikoe 26.10.2016

Hahmotelmia ensimmäisen kurssikokeen ratkaisuista.

1. a) Määrää luvun $\frac{1-3i}{(2+i)^2}$ reaali- ja imaginääriosat.
b) Ratkaise yhtälö $z^5 = 7i$
c) Anna luvun $\sqrt{3} - i$ napaesitys.
(Anna laskujen välivaiheet)

Ratkaisu: a: Lasketaan suoraan

$$\frac{1-3i}{(2+i)^2} = \frac{1-3i}{3+4i} = \frac{(1-3i)(3-4i)}{9+16} = \frac{-9-13i}{25},$$

josta voidaan lukea, että reaaliosa on $-\frac{9}{25}$ ja imaginääriosa $-\frac{13}{25}$.

b: Ratkaistaan ensin z:n moduli yhtälöstä $|z|^5 = 7$, jolloin saadaan $|z| = 7^{\frac{1}{5}}$. Mahdolliset argumentit saadaan laskettua yhtälöstä $5\phi = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, jolloin $\phi = \frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}$. Siis ratkaisuiksi saadaan $z = 7^{\frac{1}{5}} e^{i\left(\frac{\pi}{10} + \frac{2n\pi}{5}\right)}$.

c: Lasketaan ensin moduli $|\sqrt{3} - i| = \sqrt{3+1} = 2$. Seuraavaksi valitaan argumentin päähaara ja lasketaan $\arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6}$. Täten $\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{-\pi i}{6}}$.

2. a) Osoita, että $\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Milloin yhtäsuuruus pätee ?
b) Jos $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ 1 \leq x \leq 2, \ 4\pi \leq y \leq 7\pi\}$,
mikä on funktion $f(z) = e^z$ kuva alueesta Ω ?

Ratkaisu: a: Kirjoitetaan $z = x + iy$ ja lasketaan

$$|e^{(x+iy)^2}| = |e^{x^2-y^2+2xyi}| = e^{x^2-y^2} \leq e^{x^2+y^2} = e^{|x+iy|^2}.$$

Yhtälö pätee jos ja vain jos $y = 0$, eli jos z on reaalinen.

b: Mielivaltainen pystysuora jana jonka päätepisteet ovat $(x, 4\pi i)$ ja $(x, 7\pi i)$, missä $x \in [1, 2]$, kuvautuu ympyräksi $S(0, e^x)$ kuvauksessa e^z, sillä jana on pidempi kuin eksponenttifunktion jakso 2π. Kun x käy läpi luvut väliltä $[1, 2]$ reaalisen eksponenttifunktion ominaisuuksien nojalla e^x käy läpi luvut $[e, e^2]$. Siis alue Ω kuvautuu suljetulle annulukselle, jonka sisempi säde on e ja ulompi säde on e^2.

3. Muotoile Hadamardin lause potenssisarjan suppenemissäteelle. Määrää sen avulla seuraavien sarjojen suppenemissäteet ja vastaavat suppenemiskiekot.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z-4)^n \qquad\qquad b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n^3}}{n^3}$$

Ratkaisu: Muotoillaan ensin Hadamardin lause: mielivaltaisen potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

suppenemissäde R saadaan aina kaavasta

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Lasketaan tämän avulla ensimmäisen potenssisarjan suppenemissäde

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} (2^n)^{\frac{1}{n}} = 2,$$

josta saadaan $R = \frac{1}{2}$. Täten suppenemiskiekoksi saadaan $B\left(4, \frac{1}{2}\right)$.

Seuraavassa potenssisarjassa voidaan kertoimet a_n ymmärtää siten, että $a_n = \frac{1}{n}$ jos $n = k^3$ jollain positiivisella kokonaisluvulla k, ja muutoin $a_n = 0$. Käyttäen Hadamardin lausetta näihin kertoimiin saadaan

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{n^3}} = 1,$$

ja suppenemiskiekoksi saadaan $B(0, 1)$.

4. Muotoile Cauchy-Riemannin yhtälöt. Jos $f = u + iv$ on analyyttinen avoimessa joukossa $A \subset \mathbb{C}$, osoita että $u(z)$ ja $v(z)$ toteuttavat nämä yhtälöt kaikilla $z \in A$.

Ratkaisu: Cauchy Riemann yhtälöiden mukaan jos funktio $f = u + iv$ on analyyttinen alueessa A, niin kaikilla $z \in A$ pätee

$$u_x(z) = v_y(z) \qquad \text{ja} \qquad u_y(z) = -v_x(z).$$

Todistetaan seuraavaksi nämä yhtälöt. Koska f analyyttinen alueessa A erotusosamäärän raja-arvo (eli derivaatta)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(z+h) - u(z)}{h} + i\frac{v(z+h) - v(z)}{h} \right)$$

on olemassa jokaisessa pisteessä $z \in A$. Erityisesti tämä raja-arvo on sama miten tahansa sitä lähestytäänkään. Olkoot $z = x + iy \in A$ mielivaltainen. Valitaan ensin $h \in \mathbb{R}$ ja lasketaan

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h, y) - u(x,y)}{h} + i\frac{v(x+h, y) - v(x,y)}{h} \right) = u_x(z) + iv_x(z).$$

Vastaavasti jos valitaan ih saadaan

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x, y+h) - u(x,y)}{ih} + i\frac{v(x, y+h) - v(x,y)}{ih} \right) = -iu_y(z) + v_y(z).$$

Ja koska raja-arvon oltava sama molemmissa tapauksissa saadaan Cauchy Riemannin yhtälöt.

5. a) Määrää potenssin $(1+i)^{i-1}$ kaikki arvot.

b) Määrää funktion $e^{\sqrt{z}}$ kaikki haarat alueessa $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Ratkaisu: a: Lasketaan käyttäen yleisen potenssin määritelmää

$$(1+i)^{i-1} = \frac{1}{1+i}(1+i)^i = \frac{1}{1+i}e^{i\log(1+i)} = \frac{e^{i\left(\log(\sqrt{2}) + \frac{\pi i}{4} + 2\pi i n\right)}}{1+i},$$

missä $n \in \mathbb{N}$.

b: Neliöjuuren päähaara alueessa D on kuvaus $g_1 : D \to \mathbb{C}$, joka on määritelty säännöllä $g_1(re^{i\phi}) = \sqrt{r}e^{\frac{\phi i}{2}}$, missä $\phi \in (-\pi, \pi)$. Tämän voi tarkistaa huomaamalla, että kuvaus g_1 on tunnetusti jatkuva ja $(g_1(z))^2 = z$ kaikilla $z \in D$. Tätä vastaava haara kysytylle kuvaukselle on

$$e^{g_1(z)} = e^{\sqrt{r}e^{\frac{\phi i}{2}}}.$$

Samoin perustein kuin haaran g_1 tapauksessa nähdään, että neliöjuuren toinen haara saadaan kuvauksella $g_2 : D \to \mathbb{C}$, joka on määritelty säännöllä $g_2(re^{i\phi}) = -\sqrt{r}e^{\frac{\phi i}{2}}$. Tätä vastaava haara kysytylle kuvaukselle on

$$e^{g_2(z)} = e^{-\sqrt{r}e^{\frac{\phi i}{2}}}.$$

Koska neliöjuurella on alueessa D kaksi haaraa on täten löydetty kaikki kuvauksen $e^{\sqrt{z}}$ haarat tässä alueessa.