Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 22, ma 5.12.2016

Paikkojen sekoittaminen

- Istu siihen penkkiriviin, jonka numero vastaa syntymäpäiväsi kuukaudenpäivän jälkimmäistä numeroa (esim. 10.1. $\rightarrow$ 0)
- Jos sinulla on vaikeuksia näkemisessä, voit istua myös edemmäs

Presemo: Viime viikon tähtitehtävä

Oletetaan, että $f : X \to Y$ on injektio ja että $A, B \subset X$. Osoita, että $fA \cap fB \subset f[A \cap B]$.

Mitkä seuraavista sopivat todistukseen?

(a) Oletetaan, että $f(x) \in fA \cap fB$.

(b) Koska $y \in fA \cap fB$, niin $y = f(x)$ jollain $x \in A$ ja $y = f(x)$ jollain $x \in B$.

(c) Koska $a \in A$, $a = b$ ja $b \in B$, niin $a \in A \cap B$.

(d) Kuvauksen f injektiivisyydestä seuraa, että jos $f(a) = f(b)$, niin $a = b$.

(e) Siispä $y \in f[A \cap B]$.

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Viittaaminen

- Harjoituksissa ja kokeissa voi viitata todistettuihin tuloksiin
- Pyri harjoitustehtävissä kirjoittamaan viittaukset tarkasti (esim. lauseen 5.12 a-kohdan perusteella)
- Kokeessa ei tarvitse muistaa lauseiden ym. numeroita
- Varo viittaamasta suoraan todistettavaan tulokseen!

Esimerkkejä viittaamisesta

Harj. 10, tehtävä 9: Oletetaan, että $f : X \to Y$ on injektio ja että $A, B \subset X$. Osoita, että $f[A \cap B] = fA \cap fB$.

- "Harjoituksen 8 tehtävässä 6 on jo näytetty, että $f[A \cap B] \subset fA \cap fB$. Riittää siis osoittaa, että $fA \cap fB \subset f[A \cap B]$."

Ensimmäinen kurssikoe: Laske luvun $\dfrac{(1-2i)^4}{6-8i}$ itseisarvo.

- "Kurssimateriaalissa todistetun lauseen nojalla $\left|\dfrac{(1-2i)^4}{6-8i}\right| = \dfrac{|1-2i|^4}{|6-8i|}$."

Kuvitteellinen tehtävä: Todista, että f on surjektio jos ja vain jos lähtöjoukon kuva on maalijoukko.

- ÄLÄ TEE NÄIN: "Väite seuraa kurssimateriaalin lauseesta 5.5.6."

Yhdistetty kuvaus

Määritelmä

Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ ovat kuvauksia. *Yhdistetty kuvaus* $g \circ f\colon X \to Z$ määritellään asettamalla

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

kaikilla $x \in X$.

Miten muodostat yhdistetyn kuvauksen $g \circ f$ seuraavissa tapauksissa:

1) $f\colon \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $\quad g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; $\quad g\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$

Käänteiskuvaus

Määritelmä

Joukon X *identtinen kuvaus* tarkoittaa kuvausta $\mathrm{id}_X \colon X \to X$, jolla $\mathrm{id}_X(x) = x$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä

Oletetaan, että $f \colon X \to Y$ on kuvaus. Jos on olemassa sellainen kuvaus $g \colon Y \to X$, että $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ja $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, sanotaan, että kuvaus g on kuvauksen f *käänteiskuvaus* ja merkitään $f^{-1} = g$.

1) Mitä käänteiskuvaus tarkoittaa käytännössä?
2) Miksi pitää tarkistaa sekä $f \circ g$ että $g \circ f$?