

Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 20, ma 28.11.2016

Paikkojen sekoittaminen

- Mene istumaan riviin, jonka kirjain vastaa sukunimesi ensimmäistä kirjainta
- Jos sinulla on vaikeuksia näkemisessä, voit istua myös edemmäs

Huomioita viime viikon tehtävistä

- Kuvaukset alkavat sujua paremmin
- Vain 60 % oli tehnyt tehtävän, jossa piti tarkistaa itse edellisen viikon ratkaisu
- Tähtitehtäviä oli tehty huolimattomasti
- Induktioehtävät olivat tuottaneet ongelmia

Tähtitehtävät

Miksi osa tehtävistä on merkitty tähdellä?

- Tähtitehtävissä harjoitellaan kurssin tärkeimpiä asioita
- Osa tähtitehtävistä tarkistetaan \rightarrow kaksisuuntainen palautekanava
- Tähtitehtävissä harjoitellaan matemaattista kirjoittamista

Miten vastaisit oheiseen tähtitehtävään?

"Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montako alkioita enemmän on joukossa $A = \{-1, 0, 1\}$ kuin kuvajoukossa fA ?"

- Kuvajoukko on $fA = \{0, 1\}$. Nähdään siis, että joukossa A on yksi alkio enemmän.

Virheellinen induktiotodistus

Väite: Kaikilla luonnollisilla luvuilla n pätee $2^n = 1$.

Todistus.

Kun $n = 0$, väite pätee, sillä $2^0 = 1$. Oletetaan sitten, että n on luonnollinen luku ja että $2^k = 1$ pätee kaikilla $k \leq n$. Tällöin saadaan

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2^1 = 2^n \cdot \frac{2^n}{2^{n-1}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Induktioperiaatteen nojalla väite on todistettu. □

Presemo: Virheellinen induktiotodistus

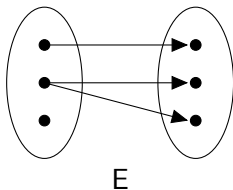
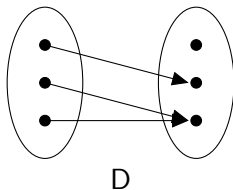
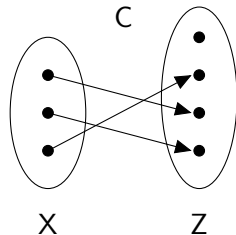
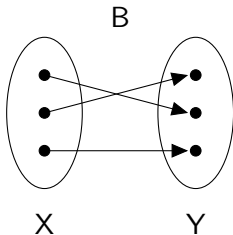
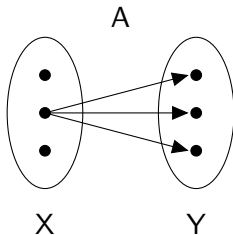
Mikä todistuksessa on vikana?

- (a) On yritetty todistaa, että $2^n = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, vaikka esimerkiksi $2^3 = 8$.
- (b) Induktio-oletuksessa pitäisi puhua annetun luvun n sijasta mielivaltaisesta luvusta k .
- (c) Alkuaskel puuttuu.
- (d) Induktio-oletuksessa luvun k pitäisi olla vähintään 0.
- (e) Induktio-oletuksessa luvun n pitäisi olla vähintään 1.
- (f) On käytetty väärää induktioperiaatetta.
- (g) Jokin muu vika.

Äänestä: presemo.helsinki.fi/jymi

Presemo: Injektio

Mitkä seuraavista säännöistä ovat injektioita?



Äänestä: presemo.helsinki.fi/jymi

Injektio eli injektiivinen kuvaus

Määritelmä

Kuvaus $f: X \rightarrow Y$ on injektio, jos kaikilla $x_1, x_2 \in X$ yhtälöstä $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $x_1 = x_2$.

- Keksi työtoverisi kanssa vaihtoehtoisia tapoja määritellä injektio

Injektion kuvailuja

- Eri lähtöjoukon alkiolla on eri kuva-alkiot (kontrapositio)
- Kullekin maalijoukon alkiole kuvautuu korkeintaan yksi alkio
- Kunkin maalijoukon alkion yksiön alkukuva on joko yksiö tai tyhjä joukko
- ...

Esimerkki: Injektiivisyyden todistaminen

Näytetään, että $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, missä $n \mapsto n^2$, on injektio.