Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 19, 23.11.2016

Kokeet

- Kokeet on tarkistettu ja tulokset ilmestyvät tänään koetulossivulle
- Koepaperiaan voi tulla katsomaan maanantaina 28.11. kello 14-15 saliin B119

Mikä todistuksessa on vikana?

Väite: Epäyhtälö $2^n \leq 2n$ pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Todistus.
Käytetään induktiota. Oletetaan, että epäyhtälö pätee, kun $n = k$. Tarkastellaan epäyhtälöä, kun $n = k + 1$:

$$
\begin{aligned}
& 2^{k+1} \leq 2(k+1) \\
\Rightarrow \quad & 2 \cdot 2^k \leq 2(k+1) \\
\Rightarrow \quad & 2^k \leq k+1 \\
\Rightarrow \quad & 2^k \leq 2k.
\end{aligned}
$$

Viimeinen rivi on sama kuin induktio-oletus, joten induktioaskel pätee. Väite on siis induktioperiaatteen nojalla tosi. $\square$

Havaintoja virheellisestä induktiosta

- Väite ei päde, joten jossain on varmasti vikaa
- Alkuaskel puuttuu (se kuitenkin pätisi)
- Päättelyn suunta on väärä: nuolten pitäisi lähteä induktio-oletuksesta
- Itse asiassa yleensä paras tapa on lähteä tutkimaan epäyhtälön toista puolta:

  $$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot (2k) \cdots$$

  (Tässä tapauksessa tämä ei tietenkään toimisi, koska väite ei päde.)
- Olisi ollut hyvä myös mainita, että $k \in \mathbb{N}$ ja $k \geq 1$

Itseselityksen strategia

- Lue seuraava todistus läpi ja keskustele siitä työtoverisi kanssa
- Yrittäkää selittää itsellenne todistuksen virkkeitä

Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja.

Väite: Jos $A \cap C \subset B$, niin $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$.

Todistus.
Oletetaan, että $A \cap C \subset B$. Tehdään vastaoletus, että $(A \setminus B) \cap C \neq \emptyset$. Tällöin löytyy jokin alkio $x \in (A \setminus B) \cap C$. Nyt $x \in (A \setminus B)$ ja $x \in C$. Erotuksen määritelmästä seuraa $x \in A$ ja $x \notin B$. Koska $x \in A$ ja $x \in C$, oletuksen perusteella $x \in B$. Tämä on ristiriita, joten $(A \setminus B) \cap C = \emptyset$. $\square$

Selityksiä

- 1) Oletetaan, että. . . : Implikaatiotodistuksessa on aluksi oletettava etujäsen.
- 2) Tehdään vastaoletus. . . : Epäsuorassa todistuksessa tehdään vastaoletus, joka on tässä tapauksessa implikaation jälkijäsenen negaatio. (Pyritään ristiriitaan.)
- . . .
- 6) Koska $x \in A$ ja $x \in C$. . . : Virkkeessä 5 on nähty, että $x \in A$, ja virkkeessä 4, että $x \in C$. Tästä on päätelty (vaikka ei kirjoitettu näkyviin) että $x \in A \cap C$. Tässä vaiheessa käytetään virkkeessä 1 tehtyä oletusta, että $A \cap C$ sisältyy joukkoon B, jotta saadaan $x \in B$.