# Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

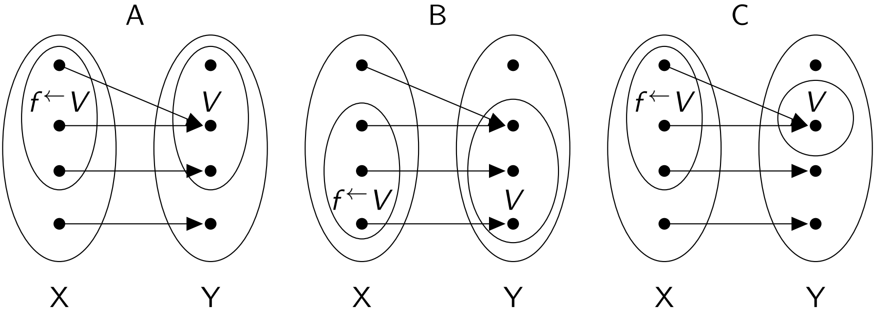
Luento 18, 21.11.2016

# Paikkojen sekoittaminen

- Istu siihen penkkiriviin, jonka numero vastaa syntymäkuukauttasi
- Jos sinulla on vaikeuksia näkemisessä, voit istua myös edemmäs

# Presemo: Alkukuva

Mitkä seuraavista havainnollistuksista ovat oikein?




Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

# Presemo: Todistuksen rakenne

Oletetaan, että $f : X \to Y$ on kuvaus ja että $V, W \subset Y$.

**Väite:** Tällöin $f^{\leftarrow}[V \cap W] \subset f^{\leftarrow}V \cap f^{\leftarrow}W$.

Miten todistus aloitetaan?

(a) Oletetaan, että $x \in V \cap W$.

(b) Oletetaan, että $x \in V$ ja $x \in W$.

(c) Oletetaan, että $x \in f^{\leftarrow}[V \cap W]$.

(d) Jos $x \in f^{\leftarrow}[V \cap W]$, niin löytyy jokin $y \in V \cap W$, jolle pätee $f(x) = y$.

(e) Jotain muuta.

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

# Määritelmien lukeminen

## Määritelmä

Oletetaan, että $f\colon X \to Y$ on kuvaus. Oletetaan lisäksi, että $B \subset Y$. Joukon $B$ *alkukuva* kuvauksessa $f$ on joukko

$$f^{\leftarrow}B = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

1) Mikä käsite yllä määritellään?
2) Miten oletukset liittyvät määritelmään?
3) Mitä yhtälörivin joukko luetaan? Mistä alkioista se koostuu?
4) Voitaisiinko yhtälörivi korvata sanallisella määrittelyllä? Mitä etua/haittaa siitä olisi?

Ehdotus: "Joukon $B$ alkukuva on niiden lähtöjoukon alkioiden joukko, jotka kuvautuvat joukkoon $B$."

# Presemo: Määritelmien lukeminen

Oletetaan, että $f\colon C \to D$ on kuvaus, $X \subset D$ ja $s \subset C$.

Missä seuraavista virkkeistä on järkeä?

(a) Kuvauksen $f$ alkukuva on epätyhjä

(b) Joukon $s$ alkukuva on epätyhjä

(c) Joukon $X$ alkukuva on tyhjä joukko

(d) Maalijoukon alkukuva on $X$

(e) Maalijoukon alkukuva on $C$

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

# Mikä todistuksessa on vikana?

**Väite:** Epäyhtälö $2^n \leq 2n$ pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Todistus.

Käytetään induktiota. Oletetaan, että epäyhtälö pätee, kun $n = k$. Tarkastellaan epäyhtälöä, kun $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} & 2^{k+1} \leq 2(k+1) \\ \Rightarrow \quad & 2 \cdot 2^k \leq 2(k+1) \\ \Rightarrow \quad & 2^k \leq k+1 \\ \Rightarrow \quad & 2^k \leq 2k. \end{aligned}$$

Viimeinen rivi on sama kuin induktio-oletus, joten induktioaskel pätee. Väite on siis induktioperiaatteen nojalla tosi. □