Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 16, 14.11.2016

Paikkojen sekoittaminen

- Mene istumaan riviin, jonka kirjain vastaa sukunimesi ensimmäistä kirjainta
- Jos sinulla on vaikeuksia näkemisessä, voit istua myös eturiviin

Tutustu työtoveriisi

- Vieressäsi istuva henkilö on tällä luennolla työtoverisi
- Esittele itsesi työtoverillesi
- Kaikilla on oltava työtoveri

Muistutuksia

- Hae kommentoidut ratkaisusi 3. kerroksen laatikoista
- Lue ohjaajien kommentit huolella ennen kuin kirjoitat tehtävän uudelleen
- Pyydä ohjaajilta apua kommenttien tulkitsemiseen

- Jos sinulla on aikaisempien vuosien tehtävien mallivastauksia, **älä kopioi** tähtitehtävien ratkaisuja niistä!

Presemo: Todistuksen aloitus

Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja ja $B \neq \emptyset$.

Väite: Jos $A \times B \subset B \times C$, niin $A \subset C$.

Miten todistus aloitetaan?

(a) Olkoon $x \in A \times B$.

(b) Olkoon $x \in A$.

(c) Olkoon $(a, b) \in A \times B$, missä $a \in A$ ja $b \in B$.

(d) Oletuksen nojalla on olemassa x, jolle pätee $x \in A \times B$ ja $x \in B \times C$.

(e) Jollain muulla tavalla.

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Presemo: Todistuksen toinen virke

Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja ja $B \neq \emptyset$.

Väite: Jos $A \times B \subset B \times C$, niin $A \subset C$.

Todistus: Oletetaan, että $A \times B \subset B \times C \ldots$

Mikä on todistuksen seuraava virke?

(a) Olkoon $x \in A \times B$.

(b) Olkoon $x \in A$.

(c) Olkoon $(a, b) \in A \times B$, missä $a \in A$ ja $b \in B$.

(d) Oletuksen nojalla on olemassa x, jolle pätee $x \in A \times B$ ja $x \in B \times C$.

(e) Jotain muuta.

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Todistuksen kehysrakenne

Oletetaan, että $A \times B \subset B \times C$.

Olkoon $x \in A$.

$\vdots$

Täten $x \in C$.

Siispä $A \subset C$.

On todistettu, että jos $A \times B \subset B \times C$, niin $A \subset C$.

Ratkaisuyritys 1

Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja ja $B \neq \emptyset$.

Väite: Jos $A \times B \subset B \times C$, niin $A \subset C$.

Todistus.

Oletetaan, että $A \times B \subset B \times C$. Oletuksesta voidaan päätellä, että $A \subset B$ ja $B \subset C$. Tästä seuraa $A \subset C$. □

- Pohdi todistusta työtoverisi kanssa.
- Mitä ongelmia tässä ratkaisuyrityksessä on?
- Yrittäkää löytää mahdollisimman monta ongelmaa.

Ongelmia:

- Todistuksen toista virkettä ei ole perusteltu.
- Todistuksesta ei näy, missä kohdassa oletusta $B \neq \emptyset$ on käytetty.

Ratkaisuyritys 2

Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja ja $B \neq \emptyset$.

Väite: Jos $A \times B \subset B \times C$, niin $A \subset C$.

Todistus.
Oletetaan, että $A \times B \subset B \times C$. Olkoot $a \in A$ ja $b \in B$. Tällöin $(a, b) \in A \times B$. Oletuksesta seuraa, että $(a, b) \in B \times C$, joten $a \in B$ ja $b \in C$. Koska a ja b olivat mielivaltaisia, voidaan päätellä, että $A \subset B$ ja $B \subset C$. Tästä seuraa $A \subset C$. $\square$

- Mitä ongelmia tässä ratkaisuyrityksessä on?

Ongelmia:

- On käytetty välitulosta $B \subset C$, mutta tämä ei seuraa oletuksista.

Tyhjä joukko osajoukkona

- On opittu, että tyhjä joukko sisältyy jokaiseen joukkoon osajoukkona
- Siis esimerkiksi $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4\}$
- Miten tämän voi selittää?
- Vertaile selityksiä työtoverisi kanssa
- Yrittäkää selittää asia niin, että voitte itse hyväksyä sen

Selityksiä

- Jotta tyhjä joukko *ei* olisi osajoukkona joukossa X, pitäisi löytyä jokin tyhjän joukon alkio, joka ei ole joukossa X. Tämä on mahdotonta, joten tyhjän joukon on oltava osajoukkona. (Vrt. epäsuoraan todistukseen ja kolmannen poissuljetun sääntöön.)
- Implikaation totuustaulua voi soveltaa väitteeseen "jos $x \in \emptyset$, niin $x \in X$". Lauseen $0 \to 1$ totuusarvo on aina tosi.
- Osajoukon saa poistamalla alkioita koko joukosta. Jos poistetaan kaikki, jää tyhjä joukko.

Presemo: Tyhjän joukon logiikkaa

Olkoon A tyhjä joukko ja B jokin toinen joukko. Mitkä seuraavista ovat totta?

(a) Kaikilla $x \in A$ pätee $x \in B$.

(b) Kaikilla $x \in A$ pätee $x^2 = -1$.

(c) On olemassa x, jolle pätee $x \in A$ ja $x \in B$.

(d) Jos $x \in A$, niin $A \neq \emptyset$.

(e) Jos $x \in A$, niin $B = \emptyset$.

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`