

Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 14, 7.11.2016

Esimerkkejä kuvauksista

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x + 1|$
- $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, g(z) = |z^2|$
- $h: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}, h(n) = 4 - n$
- $k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

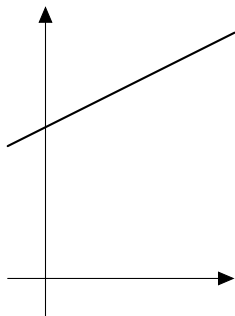
Miksi nämä ovat kuvauksia?

Miten näitä kuvauksia voisi havainnollistaa?

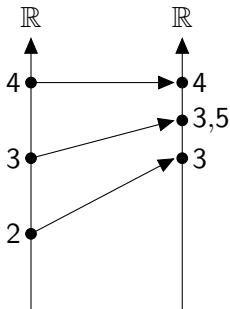
Presemo: Kuvauksen havainnollistuksia

Tarkastellaan kuvausta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jolla $f(x) = 0,5x + 2$. Mikä seuraavista havainnollistuksista on paras?

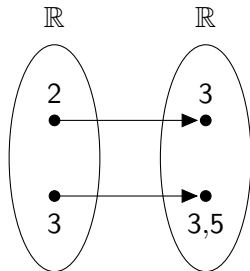
A



B



C



Äänestä: presemo.helsinki.fi/jymi

Todistukset matematiikassa

- 1) Miksi asioita todistetaan matematiikassa?
- 2) Mitä ominaisuuksia todistukselta vaaditaan?
- 3) Miksi joku haluaisi lukea todistuksen?

Opiskelijoilta kuultua

1) Miksi asioita todistetaan matematiikassa?

- Matematiikka ei ole empiiristä, joten ainoa tapa tarkistaa asioiden totuus on todistaminen (looginen päättely)

2) Mitä ominaisuuksia todistukselta vaaditaan?

- Todistuksen täytyy olla loogisesti pätevä
- Toisten täytyy pystyä lukemaan ja ymmärtämään todistus (tekstin selkeys ja oikea taso)

3) Miksi joku haluaisi lukea todistuksen?

- Uusien tulosten pätevyys täytyy tarkistaa (tieteellinen vertaisarviointi)
- Näkee asioiden yhteydet (*tärkeää opiskelijoille!*)
- Oppii todistustekniikkaa (*tärkeää opiskelijoille!*)
- Luennoitsija lukee näkeäkseen miten opiskelijat ajattelevat

Itseselittämisen strategia

Todistusta lukiessasi toimi kunkin virkkeen kohdalla seuraavasti:

- Mieti, mitä ideoita virkkeessä on käytetty.
- **Selitä itsellesi**, mitä virkkeessä tapahtuu ja miten se liittyy aiempiin todistuksissa esiintyneisiin virkkeisiin tai aiempaan omaan tietämykseeni asiasta.
- Kirjoita selityksesi ylös. Pane erityisesti merkille, jos jokin virkkeen ideoista on ristiriidassa aiemman käsityksesi kanssa.

Ennen kuin siirryt seuraavaan virkkeeseen, kysy itseltäsi:

- Ymmärräkö rivillä käytetyt ideat?
- Ymmärräkö miksi ideoita käytettiin?
- Millä tavoin ideat ovat yhteydessä muihin todistuksissa käytettyihin ideoihin, muihin lauseisiin tai aiempaan tietämykseeni?
- Auttavatko kehittämäni **selitykset** minua vastaamaan näihin kysymyksiin?

Itseselittämisen strategia: Esimerkki

- Toimi työtoverisi kanssa
- Selittäkää itsellenne seuraavan väitteen todistus

Väite: Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja. Osoitetaan, että $(A \cup B) \setminus B \subset A$.

Todistus.

Oletetaan, että $x \in (A \cup B) \setminus B$. Tästä voidaan erotuksen määritelmän nojalla päätellä, että $x \in A \cup B$ ja $x \notin B$. Edelleen koska $x \in A \cup B$, voidaan yhdisteen määritelmän nojalla päätellä, että $x \in A$ tai $x \in B$. Näistä jälkimmäinen vaihtoehto ei voi toteutua, koska jo aikaisemmin päädyttiin siihen, että $x \notin B$. Voidaan siis olla varmoja, että ensimmäinen vaihtoehto on totta eli $x \in A$. On siis näytetty, että $(A \cup B) \setminus B \subset A$. \square

Esimerkkejä selityksistä

- 1) (Oletetaan, että...) Sisältyvyystodistus aloitetaan ottamalla mielivaltainen alkio vasemmanpuoleisesta joukosta. Tämä siksi, että täytyy näyttää, että kaikki vasemmanpuoleisen joukon alkiot ovat myös oikeanpuoleisessa. Alkion mielivaltaisuus takaa, että jatkon päättely toimii kaikilla vasemmanpuoleisen joukon alkioilla.
- 2) (Tästä voidaan...) Halutaan päästä tarkastelemaan pienempiä väittämiä. Näitä väittämiä voi käyttää jatkossa erillisinä perusteluina.
...
- 4) (Näistä jälkimmäinen...) Tässä viitataan virkkeen 3 vaihtoehtoihin. Näistä poissuljetaan toinen virkkeessä 2 tehdyn huomion nojalla.

Osajoukon kuva

Olkoon $f: X \rightarrow Y$ jokin kuvaus, ja olkoon $A \subset X$

- Osajoukon A *kuva* on kaikkien joukon A alkuiden kuvien muodostama joukko
- Osajoukon kuvaa merkitään fA tai $f[A]$, muissa yhteyksissä myös $f(A)$
- Sana "kuva" voi siis tarkoittaa joko kuva-alkiota tai kuvajoukkoa

Esimerkki: Osajoukon kuva

- Olkoon $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ kuvaus, jolle $z \mapsto z^2 + 1$
- Olkoon $A = \{-1, 0, 1, 2\}$
- Määritetään fA ja $f[A \setminus \{1, 2\}]$