Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 13, 2.11.2016

Binomikertoimet ja osajoukkojen lukumäärä

Määritelmä

Oletetaan, että n, $k \in \mathbb{N}$. Jos $n = 0$, merkitään $X_n = \emptyset$. Jos $n \geq 1$, merkitään $X_n = \{1, \ldots, n\}$. Tarkastellaan niitä joukon X_n osajoukkoja, joissa on k kappaletta alkioita. Tällaisten osajoukkojen lukumäärää merkitään

$$\binom{n}{k}.$$

- Merkintä $\binom{n}{k}$ luetaan "n yli k".
- Lukuja $\binom{n}{k}$ kutsutaan *binomikertoimiksi*

Presemo: osajoukkojen lukumäärä

Valitse seuraavista kysymyksistä ne, joiden vastaus on $\binom{10}{5}$.

(a) Kokouksen 10 osallistujan joukosta valitaan viisihenkinen toimikunta. Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa on?

(b) Kuinka monta erilaista viisinumeroista pin-koodia voi muodostaa kymmenestä numeromerkistä 0, . . . , 9?

(c) Kymmenen opiskelijaa jakautuu kahdeksi viisihenkiseksi koripallojoukkueeksi. Kuinka monta erilaista jakoa on?

(d) Muodostetaan kymmenen bitin jono, jossa on 5 ykköstä (esim. 10100 11010). Kuinka monta tällaista jonoa on?

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Binomikerrointen ominaisuuksia

- $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{k} = 0$, jos $k > n$
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
- Pascalin identiteetti: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Binomikertoimen laskukaava

Lause 1

Oletetaan, että $n, k \in \mathbb{N}$ ja $k \leq n$. Tällöin

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- Lause voidaan todistaa induktiolla tai kombinatorisella päättelyllä

Binomikertoimen nimitys

Lause 2

Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ pätee

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$