

Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 12, 31.10.2016

Tervetuloa 2. periodille

- Tällä viikolla ohjaus alkaa perjantaina
- Tehtävät ilmestyvät keskiviikon tienoilla
- Periodin pääaiheina kuvaukset ja relaatiot
- Paneudutaan systemaattisemmin matematiikan lukemiseen ja kirjoittamiseen
- Myös suullisessa viestinnässä vaihdetaan isommalle vaihteelle

Presemo: Karteesinen tulo

Oletetaan, että X , Y ja Z ovat joukkoja. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

- (a) Jos $z \in X \times Y$, niin $z = (x, y)$.
- (b) Jos $x \in X$ ja $y \in Y$, niin $(x, y) \in X \times Y$.
- (c) Jos $w \in X \times Y$ ja $w \in X \times Z$, niin $w = (x_1, y)$ ja $w = (x_2, z)$, missä $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ ja $z \in Z$ ja luultavasti $y \neq z$.
- (d) Jos $z \in X \times Y$, niin $z = (s, t)$ joillakin $s \in X$ ja $t \in Y$.
- (e) Jos $w \in X \times Y$ ja $w \in X \times Z$, niin $w = (x, c)$ missä $x \in X$ ja $c \in Y \cap Z$.

Äänestä: presemo.helsinki.fi/jymi

Matemaattisen tekstin lukeminen

Pohdi työkaverisi kanssa:

- Mitä ominaispiirteitä matemaattisessa tekstissä on?
- Miten luette matemaattista tekstiä?

Koottuja matemaattisen tekstin erityispiirteitä

- Matemaattinen teksti pyrkii olemaan eksaktia: tulkinnanvaraa ei haluta jättää
- Sisältää tiivistä symbolikieltä: hitaampaa lukea, vaatii keskittymistä
- Toisinaan symbolikieli on nopeampaa lukea, kunhan symbolit ovat tuttuja
- Tietyt fraasit ja rakenteet toistuvat
- Kumuloituvaa, rakentuu edellisen tiedon päälle
- Tekstiä rytmittävät määritelmät, lauseet ja todistukset

Ohjeita matematiikan lukemiseen

Matemaattista tekstiä luetaan uudestaan ja uudestaan

- Ensimmäinen lukukerta
 - älä yritä ymmärtää kaikkea
 - anna ongelman (harjoitustehtävien) johdatella lukemista
 - yritä hahmottaa tekstin kokonaisrakennetta
- Toinen lukukerta
 - lue jo lukemasi alusta uudelleen
 - yritä yhdistää lukemaasi aiemmin oppimaasi
 - mieti, miksi teksti on kirjoitettu juuri niin kuin se on
 - vilkaise myös lauseiden todistuksia
- Myöhemmät lukukerrat
 - palaa lukemaan aina tarvittaessa
 - palaa lukemaan jonkin ajan kuluttua myös vaikkeet kokisikaan tarvetta
 - kun opit uutta, myös aiemmat asiat saavat uusia merkityksiä

Presemo: Määritelmä vai lause

Onko seuraava tekstinpätkä määritelmä vai lause?

"Oletetaan, että $L: V \rightarrow U$ on kuvaus. Jos on olemassa kuvaus $T: U \rightarrow V$, jolle pätee $T \circ L = \text{id}_V$ ja $L \circ T = \text{id}_U$, sanotaan, että kuvaus T on kuvauksen L *käänteiskuvaus*."

Äänestä: presemo.helsinki.fi/jymi

Presemo: Mitä lause sanoo?

Lause 1

Oletetaan, että $x, y \in \mathbb{R}_+$. Tällöin $\log_2(xy) = \log_2(x) + \log_2(y)$.

Todistus.

Merkitään $a = \log_2(x)$ ja $b = \log_2(y)$. Logaritmin määritelmän mukaan tällöin $x = 2^a$ ja $y = 2^b$. Soveltamalla lausetta 8.3.1 saadaan

$$xy = 2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}.$$

Tämä puolestaan tarkoittaa logaritmin määritelmän nojalla, että $\log_2(xy) = a + b$. Ottamalla huomioon, että $a = \log_2(x)$ ja $b = \log_2(y)$, päästään johtopäätökseen. □

Vaihtoehdot:

- (a) $xy = 2^{a+b}$
- (b) Logaritmia laskettaessa täytyy olettaa $x, y \in \mathbb{R}_+$
- (c) $\log_2(xy)$ voidaan ilmaista myös toisella tavalla
- (d) $a = \log_2(x)$ ja $b = \log_2(y)$

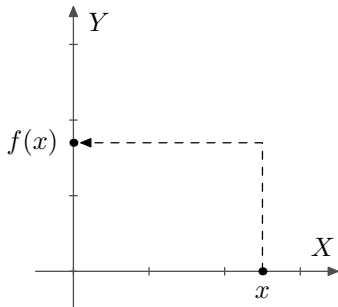
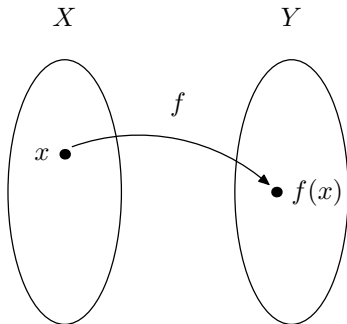
Kuvaus

Määritelmä

Oletetaan, että X ja Y ovat joukkoja. *Kuvaus* (eli *funktio*) *joukosta* X *joukkoon* Y on sääntö, joka liittää joukon X jokaiseen alkioon täsmälleen yhden alkion joukosta Y .

- Merkintä $f: X \rightarrow Y$ tarkoittaa, että f on kuvaus joukosta X joukkoon Y
- Joukkoa X kutsutaan kuvauksen f *lähtöjoukoksi* tai *määrittelyjoukoksi* ja joukkoa Y kuvauksen f *maalijoukoksi*
- Sitä joukon Y alkiota, jonka kuvaus f liittää alkioon x , merkitään $f(x)$ ja kutsutaan alkion x *kuva-alkioksi*

Havainnollistuksia:



Esimerkki kuvauksesta

Määritellään $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla $g(x) = |x + 1|$.

Tällä tavalla saadaan kuvaus, sillä jos $x \in \mathbb{R}$, niin

- 1) $|x + 1|$ on olemassa
- 2) $|x + 1|$ on yksikäsitteisesti määrätty
- 3) $|x + 1| \in \mathbb{R}$.

Kaksi havainnollistusta kuvauksesta g :

