Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Luento 9, 7.10.2016

Presemo: komplementti

Tarkastellaan reaalilukujen osajoukkoa $A = \{1, 2\}$. Mitkä seuraavista joukoista ovat sama kuin joukon A komplementti $\complement A$?

(a) $\{\ldots, -2, -1, 0, 3, 4, 5, \ldots\}$
(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ tai } x > 2\}$
(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ja } x > 2\}$
(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ tai } x \neq 2\}$
(e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ ja } x \neq 2\}$

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Keskustelun koodisanat

Kiellettyjä:

- "Olet väärässä"
- "En osaa"
- "Sinä varmasti tiedät paremmin"

Työhön ryhtyminen:

- "Haluatko miettiä yhdessä?"
- "En ymmärtänyt kysymystä. Ymmärsitkö sinä?"
- "En tiedä, mitä tämä käsite tarkoittaa. Katsotaan luentomateriaalista sen määritelmä."

Keskustelun eteenpäin vieminen:

- "Sano vain, minä kuuntelen"
- "En ihan ymmärtänyt, selitä vielä"
- "Minulla on uusi idea"
- "Minulla on eriävä näkemys"
- "Anna kun mietin vielä hetken"

Presemo: joukkoon kuuluminen

Oletetaan, että X on joukko ja että $A, B \subset X$. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia?

(a) Jos $x \notin A \cup B$, niin $x \notin A$
(b) Jos $y \notin B$, niin $y \in \complement B$
(c) Jos $z \notin A$, niin $z \notin A \cup B$
(d) Jos $w \in \complement(A \cup B)$, niin $w \in X$
(e) Jos $u \notin A$ tai $u \notin B$, niin $u \notin A \cup B$
(f) Jos $u \notin A \cup B$, niin $u \notin A$ tai $u \notin B$

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Esimerkki: Implikaation käyttö sisältyvyystodistuksissa

- Olkoot A, B ja X joitain joukkoja. Oletetaan, että $A, B \subset X$.
- Väite: Jos $B \subset A$, niin $A \cup \complement B = X$.
- Montako implikaatiota väitteessä on?
- Miten todistus rakennetaan?

Jatkoa: Todistuksen kehysrakenne

Pääkehys:

Olet. $B \subset A$.

$$
\left[\begin{array}{ll}
 & \vdots \\
1) & A \cup \complement B \subset X \\
 & \vdots \\
2) & X \subset A \cup \complement B \\
 & \vdots
\end{array}\right.
$$

Siispä $A \cup \complement B = X$.

Jatkoa: Todistuksen kehysrakenne

Alikehykset:

1) Olk. $x \in A \cup \complement B$.

$$\left[\quad \vdots \right.$$

Siis $x \in X$. Täten $A \cup \complement B \subset X$.

2) Olk. $y \in X$.

$$\left[\quad \vdots \right.$$

Siis $y \in A \cup \complement B$. Täten $X \subset A \cup \complement B$.

Jatkoa: kehysten täyttäminen

1) Olk. $x \in A \cup \complement B$. Tällöin $x \in A$ tai $x \in \complement B$. Ensimmäisessä tapauksessa $x \in X$, koska $A \subset X$. Jälkimmäisessä tapauksessa $x \in X$ ja $x \notin B$ (komplementin määritelmän nojalla), joten $x \in X$. Molemmissa tapauksissa pätee siis $x \in X$. Täten $A \cup \complement B \subset X$.

2) Olk. $x \in X$. Tällöin $x \in B$ tai $x \in \complement B$. Jos $x \in \complement B$, niin $x \in A \cup \complement B$, minkä halusimme näyttää. Voimme siis olettaa, että $x \in B$ (koska tämä on ainoa jäljellä oleva vaihtoehto). Oletuksen mukaan $B \subset A$, joten tällöin $x \in A$. Siis tässäkin tapauksessa pätee $x \in A \cup \complement B$. Täten $X \subset A \cup \complement B$.

Vrt. myös kurssimonisteen esimerkin 3.3.3 todistukseen.