Johdatus yliopistomatematiikkaan

Jokke Häsä

Matematiikan ja tilastotieteen laitos, HY

Luento 8, 5.10.2016

Geometrinen lukujono

Määritelmä

Lukujonoa $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sanotaan *geometriseksi*, jos on olemassa sellainen $q \in \mathbb{R}$ että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$a_{n+1} = qa_n \, .$$

Lukua q nimitetään geometrisen lukujonon *suhdeluvuksi*.

Huom.

- ⋆ Jos $a_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin määritelmän yhtälö voidaan muuttaa muotoon
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$
Toisin sanottuna lukujono on geometrinen, jos kahden peräkkäisen luvun suhde on vakio.

Presemo: Geometrinen lukujono

Mitkä seuraavista ovat geometrisia lukujonoja?

(a) $1, -2, 4, -8 \ldots$

(b) $5, 9, 13, 17, \ldots$

(c) $54, 18, 6, 2, \ldots$

(d) $0, 0, 0, 0, \ldots$

(e) $6,\ 3/2,\ 3/8,\ 3/32, \ldots$

Äänestä: `presemo.helsinki.fi/jymi`

Geometrinen lukujono

Lause 1

Oletetaan, että $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ on geometrinen lukujono, jonka suhdeluku on q. Tällöin

$$a_n = a_0 q^n$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Todistus.

Alkuaskel: Geometrisen lukujonon määritelmän mukaan $a_1 = qa_0 = a_0q^1$. Väite pätee siis luvulla $1 \in \mathbb{N}$.

Induktioaskel: Tehdään induktio-oletus: Oletetaan, että $k \geq 1$ ja $a_k = a_0q^k$. Näytetään, että tällöin vastaava väite pätee seuraavalla luonnollisella luvulla $k+1$:

Käytetään geometrisen lukujonon määritelmää ja induktio-oletusta:

$$a_{k+1} = qa_k = q(a_0q^k) = a_0q^{k+1}.$$

Johtopäätös: Alkuaskeleesta ja induktioaskeleesta seuraa induktioperiaatteen nojalla, että väite pätee kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$. $\square$

Malthusilainen kasvu

Vuonna 1798, Robert Malthus esitti, että populaatioiden kasvu noudattaa geometrista lukujonoa. Pohdi työtoverisi kanssa seuraavia kysymyksiä:

(a) Mitä tämä väite tarkoittaa matemaattisesti?

(b) Mistä tekijöistä tässä sovelluksessa suhdeluku q riippuu?

(c) Mitä lisäolettamuksia on tehtävä, että Malthusilainen kasvu on mahdollinen?

Esimerkki: Malthusilainen kasvu

Tehtävä vuodelta 2001:

Meksiko Cityn asukasluku oli vuoden 1995 alussa n. 13 miljoonaa. Minä vuonna metropolialueen asukasluku ylittää 25 miljoonan rajan, jos vuotuiseksi väestönkasvuksi oletetaan 4 %?

Vuonna 2011 Meksiko Cityn asukasluku oli n. 21,2 miljoonaa (Wikipedia). Mikä oli todellinen vuotuinen väestönkasvu, jos oletetaan sen olleen vakio?

Geometrinen sarja

Määritelmä

Oletetaan, että a, $q \in \mathbb{R}$. *Geometrinen sarja* on päättymätön summa

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

Huom.

- Geometriseen sarjaan päädytään, jos yritetään laskea yhteen jonkin geometrisen lukujonon kaikki termit.
- Sopimus: yllä olevassa määritelmässä $q^0 = 1$ kaikilla $q \in \mathbb{R}$, myös jos $q = 0$.

Geometrisen sarjan osasumma

Määritelmä

Oletetaan, että a, $q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 1$. Geometrisen sarjan n:s *osasumma* S_n tarkoittaa sen n ensimmäisen termin summaa

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}.$$

Huom.

$S_1 = a$
$S_2 = a + aq$
$S_3 = a + aq + aq^2$
jne.

Geometrisen sarjan osasumma

Lause 2

Oletetaan, että a, $q \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Geometrisen sarjan n:s osasumma on

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} aq^k = \begin{cases} a \cdot \dfrac{1-q^n}{1-q}\,, & \text{jos } q \neq 1; \\ na\,, & \text{jos } q = 1. \end{cases}$$

Todistus.

Induktiolla luvun n suhteen; jätetään harjoitustehtäväksi. $\square$

Geometrisen sarjan summa

Oletetaan, että $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ja $-1 < q < 1$. Tällöin voidaan osoittaa, että luvun n kasvaessa q^n lähestyy nollaa eli $q^n \to 0$.

Tästä seuraa edelleen, että luvun n kasvaessa geometrisen sarjan osasummat S_n lähestyvät lukua $a/(1-q)$:

$$S_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \;\longrightarrow\; a \cdot \frac{1-0}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Geometrisen sarjan summa

Jos $-1 < q < 1$, niin lukua

$$\frac{a}{1-q}$$

sanotaan geometrisen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

summaksi.

Esimerkki: Geometrinen sarja

Kaksi kursailevaa kaverusta jakavat viimeistä kakunpalaa. Kumpikin ottaa vuorotellen aina puolet jäljellä olevasta palasta. Kuinka suuren osan kakusta ensimmäinen kaverus lopulta tulee saamaan, ja kuinka paljon jää toiselle kaverukselle?