

HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016
Harjoitus 6

Ratkaisut palautettava viimeistään ke 19.10. klo 18.30.
Korjaukset palautettava viimeistään ke 9.11. klo 18.30.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1.9.

1. Määritä karteeminen tulo $A \times B$, kun

(a) $A = \{1, 4, 2\}$ ja $B = \{3, 1, 4\}$

(b) $A = \{1\}$ ja $B = \mathbb{N}$

(c) $A = \{a \in \mathbb{Z} : |a| < 2\}$ ja $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\}$

(d) $A = \mathbb{Z}$ ja $B = \emptyset$.

2. Onko yhtälö $(A \times B) \setminus C = (A \setminus C) \times (B \setminus C)$

a) tosi kaikilla joukoilla A , B ja C ?

b) epätosi kaikilla joukoilla A , B ja C ?

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 3.4. Kertaa tarvittaessa myös lukua 3.2.

3. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita, että jos $a^2(b^2 - 2b)$ on pariton, niin a ja b ovat parittomia.

★4. Oletetaan, että A , B ja C ovat joukkoja. Osoita kontrapositiotodistuksen tekniikalla, että jos $A \cap B \subset C$, niin $(A \setminus C) \cap B = \emptyset$.

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 1.9.

5. Oletetaan, että A , B , C ja D ovat joukkoja.

a) Osoita vastaesimerkillä, että väite ”jos $A \times B \subset C \times D$, niin $A \subset C$ ” ei pidä paikkaansa kaikilla joukoilla A , B , C ja D .

b) Oletetaan, että $B \neq \emptyset$. Osoita, että tällöin väite ”jos $A \times B \subset C \times D$, niin $A \subset C$ ” pätee.

6. Ovatko seuraavat väitteet tosia kaikilla joukoilla A , B , C ja D ?

a) $(A \setminus C) \times B \subset (A \times B) \setminus (C \times D)$.

b) $(A \setminus C) \times B = (A \times B) \setminus (C \times D)$.

Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät kertaavat kurssin alkupuolen käsitteitä ja induktiotodistusta.

7. Tarkastellaan joukon \mathbb{N} osajoukkoa $A = \{3, 7, 9, 0\}$. Ovatko seuraavat väitteet tosia?

(a) $\emptyset \in A$

(b) $-2 \in \mathbb{C}A$

(c) $(9, 1) \in \mathbb{N} \times A$

(d) $\{7, 9\} \in \mathcal{P}(A)$

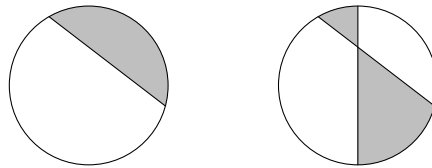
(e) $4 \in \mathbb{C}A$

(f) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$

(g) $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A)$

(h) $\{\{3\}\} \in \mathcal{P}(A)$.

8. Fibonaccin lukujono määritellään rekursiivisesti asettamalla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ ja lisäksi $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 2$.
- Laske luvut F_2, \dots, F_8 .
 - Laske summa $\sum_{i=0}^3 F_{2i+1}$.
 - Osoita induktiolla, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee $\sum_{i=0}^n F_{2i+1} = F_{2n+2}$.
9. Harjoituksen 4 tehtävässä 9 tarkasteltiin ympyrän jänteitä ja väitettä $P(n)$: ” n jänteen rajaamat alueet voidaan värittää kahdella värillä niin, että mitkään kaksi vierekkäistä aluetta eivät ole samanväriset”. Alla olevissa kuvissa on havainnollistettu väitteitä $P(1)$ ja $P(2)$.



- Todista väite $P(1)$.
- Todista, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee: jos $P(n)$ on tosi, niin $P(n+1)$ on tosi.
- Päättele, että $P(n)$ on tosi kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

Tehtäväsarja V

Seuraavat tehtävät liittyvät vielä kurssimateriaalin lukuun 1.9.

10. Havainnollista koordinaatistossa seuraavia tulojoukon $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ osajoukkoja:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 5 \text{ ja } -1 \leq y \leq 3\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

Apu: Muista ympyrän yhtälö $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

11. Jatkoa tehtävään 10. Havainnollista koordinaatistossa joukkoja $(A \cap B) \cup C$, $(A \setminus B) \cap C$ ja $A \setminus (B \setminus C)$.

Kompleksiluvut

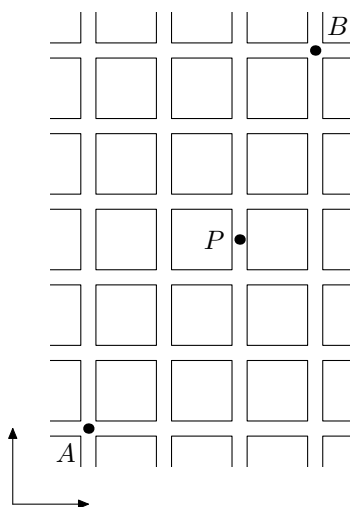
Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 7.3–7.6.

- ★12. a) Kompleksiluvusta z tiedetään, että $z + \bar{z} = 8$ ja $z\bar{z} = 25$. Mitä voit päätellä luvusta z ?
- b) Millainen kuvio muodostuu kompleksitasoon niistä pisteistä z , jotka toteuttavat yhtälön $|z - 3 - i| = |z + 1 - 3i|$? Miten ratkaisu liittyy kompleksitason pisteisiin $3 + i$ ja $-1 + 3i$?
13. a) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $z + \bar{z}^2 = 0$.
- b) Osoita, että tarkasteltavan yhtälön nolosta poikkeavat ratkaisut ovat tasasivuisen kolmion kärkinä kompleksitasossa.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 8.1.

- ★ 14. Oheisessa kaavakuvassa on näkyvissä Kampin kortteleita välillä Albertinkatu–Yrjönkatu ja Merimiehenkatu–Lönnrotinkatu. Opiskelija Robert Fredrikson kävelee joka arkiamu kotoaan Merimiehenkadun ja Albertinkadun kulmasta (piste A) Vanhan kirkkopuiston kulmalle (piste B).
- Oletetaan, että Robert kulkee aina kuvassa näkyviä teitä pitkin ja aina jompaan kumpaan nuolilla merkityistä suunnista. Kuinka monta erilaista kävelyreittiä hänellä silloin on pisteestä A pisteeseen B ?
 - Oletetaan, että Robert poikkeaa joka arkiamu kahvilassa pisteessä P . Kuinka monta erilaista reittiä hän tällöin voi kulkea?
 - Jos Robert haluaakin vältellä kahvilaa eikä koskaan kulje pisteen P kautta, kuinka monta erilaista reittiä hän voi kulkea?



Vihje: Kuvaa Robertin kävelyreitti bittijonona.

15. a) Auton rekisteritunnus muodostuu 2–3 kirjaimesta ja positiivisesta kokonaisluvusta, joka on välillä 100–999. Esimerkiksi ABC–123 on yksi mahdollinen rekisteritunnus. Kuinka monta erilaista rekisteritunnusta voidaan muodostaa?
(Rekisteritunnuksessa voidaan käyttää kaikkia aakkosten 29 kirjainta.)
- b) Kuinka monessa rekisteritunnuksessa on yksi vokaali (A, E, I, O, U, Y, Å, Ä, Ö), kaksi samaa konsonanttia ja neljällä jaollinen numero-osa?