HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016
Harjoitus 5

Ratkaisut palautettava viimeistään ke 12.10. klo 18.30.
Korjaukset palautettava viimeistään ke 2.11. klo 18.30.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1.8.

1. Määritä seuraavat potenssijoukot:

$$\text{(a)}\ \mathcal{P}(\{8\}) \quad \text{(b)}\ \mathcal{P}(\{3,5,4\}) \quad \text{(c)}\ \mathcal{P}(\emptyset) \quad \text{(d)}\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \quad \text{(e)}\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))).$$

2. Toteutuuko yhtälö $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ kaikilla joukoilla A ja B?

Tehtäväsarja II

Seuraavissa tehtävissä harjoitellaan kahden joukon osoittamista samaksi. Kertaa tarvittaessa kurssimateriaalin lukuja 1.5–1.7.

3. Oletetaan, että X on joukko. Osoita, että sen osajoukoille A ja B on voimassa toinen de Morganin laki, jonka mukaan $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$.

4. Osoita, että kaikilla joukoilla A ja B pätee

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Miten symmetrinen erotus $A \triangle B$ liittyy tähän tehtävään? *Muistutus: harjoitus 2 teht. 5.*

Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 3.1–3.2.

Pätevätkö seuraavat väitteet kaikilla joukoilla A, B ja C?

5. $(A \cap B) \setminus C = A \cap (B \setminus C)$.

$\star$6. Jos $A \cap C = B \cap C$, niin $A = B$.

$\star$7. Jos $A \cup B = B$, niin $A \cap B = A$.

Tehtäväsarja IV

Kertaa tarvittaessa induktiotodistukseen liittyviä asioita kurssimateriaalin luvusta 4.

8. Todista induktiolla Bernoullin epäyhtälö: jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x > -1$, niin $(1+x)^n \geq 1 + nx$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Missä todistuksen kohdassa tarvitset oletusta $x > -1$?

$\star$9. Onko seuraava induktiotodistus mielestäsi pätevä? Jos ei, kerro perustellen, mikä siinä on vialla.

Väite. Kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1) + 1.$$

Todistus. Merkitään $S_n = 1 + 5 + 9 + \cdots + (4n + 1)$.

Induktio-oletus: Oletetaan, että väite pätee jollakin luvulla $k \geq 1$ eli että

$$S_k = (k + 1)(2k + 1) + 1.$$

Induktioväite: On osoitettava, että vastaava yhtälö pätee myös seuraavalla luvulla $k + 1$ eli

$$S_{k+1} = (k + 1 + 1)(2(k + 1) + 1) + 1.$$

Tarkastellaan induktioväitteen vasenta puolta:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 5 + 9 + \cdots + (4k + 1) + (4k + 5) \\ &= (k + 1)(2k + 1) + 1 + (4k + 5) \\ &= (2k^2 + k + 2k + 1) + 1 + (4k + 5) = 2k^2 + 7k + 7. \end{aligned}$$

Tarkastellaan sen jälkeen oikeaa puolta:

$$\begin{aligned} (k + 1 + 1)(2(k + 1) + 1) + 1 &= (k + 2)(2k + 3) + 1 \\ &= (2k^2 + 3k + 4k + 6) + 1 = 2k^2 + 7k + 7. \end{aligned}$$

Induktioväitteen vasen ja oikea puoli ovat yhtä suuret, joten induktioperiaatteen nojalla väite pätee.

Tehtäväsarja V

Seuraavissa tehtävissä tarvitaan tietoja kurssimateriaalin luvuista 1.8 ja 3.2. Lisäksi tehtävästä 1 sekä harjoituksen 3 tehtävästä 11 voi olla apua.

10. Oletetaan, että A on joukko. Luvun 1.8 nojalla tiedetään, että $A \in \mathcal{P}(A)$.
    a) Keksi esimerkki joukosta A, jolle $A \not\subset \mathcal{P}(A)$.
    b) Osoita, että jos $A \subset \mathcal{P}(A)$, niin $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.
    c) Keksi esimerkki joukosta A, jolle $A \subset \mathcal{P}(A)$.

11. Olkoon $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/n \leq x \leq n\}$ jokaisella luonnollisella luvulla $n \geq 1$. Määritä

    (a) joukot A_1, A_2 ja A_{10} (b) yhdiste $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (c) leikkaus $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Kompleksiluvut

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 7.3–7.6.

12. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö
    a) $6z - 4i = 2i(z - 4i)$
    b) $z\bar{z} - 3iz = 5(7 - 3i)$.

13. Oletetaan, että luvulle $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ pätee $w^4 = 1$.
    a) Osoita, että $(1 + w + w^2 + w^3)(w - 1) = w^4 - 1$.
    b) Päättele summan $1 + w + w^2 + w^3$ arvo oletusten ja a-kohdan avulla.
    c) Päättele seuraavien lausekkeiden arvot:

       i. $(w^2 + 1)(w + w^2) + 1$ ii. $(w + 1)^3 + 2w^3$ iii. $\dfrac{1}{1 + w + w^2} + w\,.$

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 8.1.

14. a) Jalkapallojoukkueessa on 18 henkeä. Ennen peliä heistä 11 valitaan pelaajiksi ja seitsemän vaihtopelaajiksi. Kuinka monella eri tavalla tämä valinta voidaan tehdä?
    b) Luennoitsija laatii kertaustehtäviksi 25 väitettä, joista jokainen on tosi (T) tai epätosi (E). Väitteistä 12 on tosia. Kuinka monta erilaista oikeaa vastausriviä on mahdollista muodostaa vaihtelemalla väitteiden järjestystä?

15. Tarkastellaan yhdeksän bitin jonoja kuten esimerkiksi 001 101 011. Kuinka monessa tällaisessa jonossa on
    a) tasan viisi ykköstä?
    b) enintään viisi ykköstä?
    c) vähintään viisi ykköstä?
    d) tasan viisi ykköstä, joista ensimmäinen jonon alussa?