HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016
Harjoitus 4

Ratkaisut palautettava viimeistään ke 5.10. klo 18.30.
Korjaukset palautettava viimeistään ke 19.10. klo 18.30.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1.7.

1. Tarkastellaan joukon $\mathbb{Z}$ osajoukkoja $A = \{2,4,6,8\}$ ja $B = \{5,6,7,8,9\}$. Määritä

   (a) $\complement A$ (b) $\complement B$ (c) $\complement(A \cap B)$ (d) $\complement(A \cup B)$.

2. Miten voisit edellisessä tehtävässä ilmaista joukot $\complement(A \cap B)$ ja $\complement(A \cup B)$ joukkojen $\complement A$ ja $\complement B$ avulla?

3. Olkoon $A = \{2,0,1,6\}$. Määritä joukko $\complement A$ tai perustele, miksi sitä ei voi määrittää.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuihin 3.1–3.2.

4. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Osoita seuraavat väitteet epätodeksi vastaesimerkin avulla:

   (a) Jos $a < b$, niin $a^2 < b^2$. (b) Jos $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, niin $a \in \mathbb{Z}$ ja $b \in \mathbb{Z}$.

5. Tässä tehtävässä tarvitaan jakojäännöksen käsitettä (kurssimateriaalin määritelmä 8.4.3). Sanonta ”kokonaisluvun a jakojäännös neljällä jaettaessa on 1” tarkoittaa, että $a = 4k+1$ jollakin $k \in \mathbb{Z}$.

   Oletetaan, että $m \in \mathbb{Z}$. Osoita, että jos luvun m jakojäännös neljällä jaettaessa on 1, niin myös luvun m^2 jakojäännös neljällä jaettaessa on 1.

6. Oletetaan, että $a, b \in \mathbb{R}$. Osoita, että jos $a < b$, niin $\frac{a+b}{2} > a$.

⋆7. Päteekö väite ”jos $A \subset B \cup C$, niin $A \subset B$ tai $A \subset C$” kaikilla joukoilla A, B ja C?

⋆8. Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja. Osoita, että $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup B$.

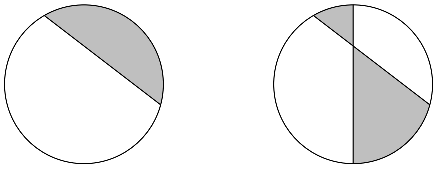
Tehtäväsarja IV

Kertaa tarvittaessa induktiotodistukseen liittyviä asioita kurssimateriaalin luvusta 4.

9. *Jänne* tarkoittaa ympyrän kahden pisteen välistä janaa. Jos jänne kulkee ympyrän keskipisteen kautta, sitä sanotaan ympyrän halkaisijaksi.

   Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$ ja $n \geq 1$. Tarkastellaan tilannetta, jossa ympyrälle piirretään n jännettä. Olkoon $P(n)$ väite ”n jänteen rajaamat alueet voidaan värittää kahdella värillä niin, että mitkään kaksi vierekkäistä aluetta eivät ole samanväriset”.

   Alla olevissa kuvissa on havainnollistettu väitteitä $P(1)$ ja $P(2)$.



Oletetaan, että sinulla on käytössäsi seuraavat tiedot:

Väite $P(1)$ on tosi. Toisin sanottuna yhden jänteen rajaamat alueet voidaan värittää kahdella värillä niin, että mitkään kaksi vierekkäistä aluetta eivät ole samanväriset.

Kaikilla luonnollisilla luvuilla $k \geq 1$ pätee seuraava: jos $P(k)$ on tosi, niin $P(k+1)$ on tosi.

a) Voitko päätellä, että $P(2)$ on tosi? Miten?

b) Voitko päätellä, että $P(3)$ on tosi? Miten?

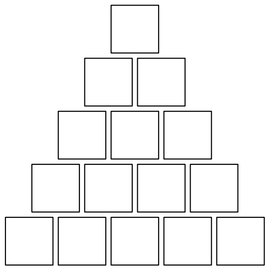
c) Voitko päätellä, että $P(4)$ on tosi? Miten?

d) Voitko päätellä, että $P(42)$ on tosi? Miten?

e) Onko olemassa jokin sellainen luonnollinen luku $n \geq 1$, jonka tapauksessa ei ole mahdollista päätellä, että $P(n)$ on tosi?

10. Tarkastellaan väitettä, jonka mukaan $n^2 + 9 > 6n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Osoita väite todeksi induktiolla tai perustele, että se on epätosi.

11. Kauppias sai Japanista erän kuution muotoon kasvatettuja vesimeloneja ja päätti kasata niistä tornin hedelmäosastolle. Tornin huipulle tuli yksi vesimeloni, toiseksi ylimpään kerrokseen $2 \cdot 2 = 4$ vesimelonia, niiden alle $3 \cdot 3 = 9$ vesimelonia ja niin edelleen. Viereisessä kuvassa on torni sivusta kuvattuna.



Oletetaan, että $n \in \mathbb{N}$.

a) Muodosta summa, joka kertoo, kuinka monta vesimelonia on n-kerroksisessa tornissa.

b) Osoita induktiolla, että n-kerroksisen tornin vesimelonien kokonaismäärä on

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Kompleksiluvut

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 7.3–7.6.

12. a) Oletetaan, että $z \in \mathbb{C}$. Osoita induktiolla, että $|z^n| = |z|^n$ kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$. *Apu: lause 7.4.6.*

b) Määritä seuraavien kompleksilukujen itseisarvo:

i. $(6\sqrt{2} + 7i)^{-1}\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)^{2014}$ ii. $\frac{(1+3i)^{365}}{(\sqrt{6} - 2i)^{363}}.$

Apu: lauseet 7.4.6 ja 7.5.7 sekä tämän tehtävän a-kohta ja harjoituksen 3 tehtävä 12 (a).

13. Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $2z + i\bar{z} = 3i$.

    Ohje: yhtälössä esiintyy sekä z että $\bar{z}$, minkä vuoksi kannattaa merkitä $z = x + yi$ ja sen jälkeen ratkaista x ja y.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 8.2.

14. Vuoden 2016 syyslukukauden alussa eräässä yliopistossa oli 500 tutkijaa. Joka kevät 10 % tutkijoista irtisanottiin yt-neuvotteluissa ja kesäisin tilannetta yritettiin korjata rekrytoimalla 30 uutta tutkijaa.

    Tarkastellaan lukujonoa (a_n), jossa jäsen a_n ilmaisee tutkijoiden määrän vuoden n syyslukukauden alussa ($n = 0$ vastaa vuotta 2016).

    a) Muodosta rekursioyhtälö, joka kertoo, miten a_{n+1} riippuu luvusta a_n. Mikä on a_0?

    b) Osoita induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee

    $$a_n = a_0 q^n + \sum_{j=0}^{n-1} bq^j,$$

    missä $b = 30$ ja $q = 0{,}9$.

15. Jatkoa tehtävään 14. *(Tämän tehtävän voi tehdä jo ennen tehtävää 14.)*

    a) Käytä tehtävän 14 b-kohdan tulosta ja laske kyseisen yliopiston tutkijoiden määrä 20 vuoden kuluttua vuoden 2036 syyslukukauden alussa.

    b) Jos tilanne jatkuu samanlaisena, pieneneekö yliopiston tutkijoiden määrä lopulta nollaan vai päätyykö yliopisto tasapainotilaan, jossa tutkijoiden määrä on suurin piirtein vakio? Mikä tämä mahdollinen vakiomäärä siinä tapauksessa on?