HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016
Harjoitus 3

Ratkaisut palautettava viimeistään ke 28.9. klo 18.30.
Korjaukset palautettava viimeistään ke 12.10. klo 18.30.

Tehtäväsarja I

Kertaa tarvittaessa kurssimateriaalin lukua 4.1.

1. Laske seuraavat summat:

   (a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(8j-5)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(-1)^n n^2$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5}(k-1)x^{k+1}$

$\star$2. Osoita induktiolla, että kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$ pätee

$$\sum_{j=1}^{n}(8j-5) = 4n^2 - n.$$

Tehtäväsarja II

Kertaa tarvittaessa kurssimateriaalin kappaleita 1.1–1.4.

3. Selitä seuraavien väitteiden sisältö suomen kielellä ilman matemaattisia symboleita. Ovatko väitteet tosia vai epätosia?

   (a) $-7 \in \{x \in \mathbb{Q} : |x| > 2\}$ (b) $125 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n = k^3,\ \text{missä } k \in \mathbb{Z}\}$.

$\star$4. Selitä, mikä ero on joukoissa $\emptyset$ ja $\{\emptyset\}$. Entä mikä ero on joukoissa $\mathbb{N}$ ja $\{\mathbb{N}\}$?

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuihin 1.5–1.6.

5. Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja.
   a) Piirrä Vennin kaaviot joukoista $(A \cup B) \setminus (B \cap C)$ ja $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
   b) Tarkastellaan seuraavaa väitettä: kaikilla joukoilla A, B ja C pätee
   $$(A \cup B) \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$
   Osoita tämä väite epätodeksi vastaesimerkin avulla.
   c) Perustele seuraava väite: kaikilla joukoilla A, B ja C pätee
   $$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus (B \cap C).$$

6. Osoita, että kaikilla joukoilla A, B ja C pätee
   a) $(A \cup B) \setminus C \subset (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.
   b) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subset (A \cup B) \setminus C$.

   Minkä johtopäätöksen voit tehdä a- ja b-kohtien nojalla?

Tehtäväsarja IV

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 2.2–2.5.

$\star$7. Muodosta seuraavien väitteiden kanssa loogisesti ekvivalentit väitteet, joissa ei esiinny negaatiosymbolia $\neg$. Symbolia $\notin$ voi käyttää.

(a) $\neg\big((a \in \mathbb{Z}) \wedge (a \in \mathbb{Q})\big)$ (b) $\neg\big((a \in \mathbb{Z}) \vee (a \in \mathbb{Q})\big)$

(c) $\neg\big((a \in \mathbb{Q}) \to (a \in \mathbb{Z})\big)$ (d) $\neg\big((a \in \mathbb{Z}) \to (a \in \mathbb{Q})\big)$

8. Jatkoa tehtävään 7. Keksi jokaisen väitteen tapauksessa esimerkki sellaisesta luvusta a, jolla väite on tosi, tai selitä, miksi tällaista lukua ei ole olemassa.

9. Kirjoita seuraavat väitteet kvanttorien avulla.

   a) Jos $c > -4$, niin yhtälöllä $x^2 + 5x = c$ on ratkaisu.

   b) Jos luku on negatiivinen, niin se ei ole minkään luvun toinen potenssi.

   Kirjoita myös seuraavat väitteet kvanttorien avulla. Älä käytä joukko-opillisia merkintöjä $\cap$, $\emptyset$, $\smallsetminus$ ja $\subset$. Voit käyttää symbolia $\in$.

   c) $A \cap B \neq \emptyset$.

   d) $A \smallsetminus B = \emptyset$, jos ja vain jos $A \subset B$.

10. Tulkitse seuraavat luonnollisia lukuja koskevat väitteet suomen kielelle ja päättele, ovatko ne tosia vai epätosia. Perustele omin sanoin.

(a) $\forall m \exists n (m < n)$ (b) $\forall n \exists m (m < n)$

(c) $\exists n \forall m (m \leq n)$ (d) $\exists m \forall n (m \leq n)$.

Tehtäväsarja V

Seuraavassa tehtävässä tutustutaan joukkojen yhdisteeseen ja leikkaukseen useamman kuin kahden joukon tapauksessa.

11. Oletetaan, että J on joukko ja että jokaista $j \in J$ kohti on annettu jokin joukko A_j. Tällöin joukkojen A_j yhdiste ja leikkaus määritellään seuraavasti:

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ jollakin } j \in J\} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{j \in J} A_j = \{x \mid x \in A_j \text{ kaikilla } j \in J\}.$$

Olkoon $J = \{1, 2, 3\}$ ja olkoon $A_j = \{j, j+2, 2j-1, j^2 - j\}$ kaikilla $j \in J$. Määritä seuraavat joukot luettelemalla niiden alkiot:

(a) jokainen joukoista A_j (b) yhdiste $\bigcup_{j \in J} A_j$ (c) leikkaus $\bigcap_{j \in J} A_j$.

Valitse ainakin toinen seuraavista tehtäväsarjoista pääaineesi tai kiinnostuksesi mukaisesti. Jos haluat, voit tehdä vaikka kaikki tehtävät.

Kompleksiluvut

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 7.3–7.6.

12. a) Oletetaan, että $z, w \in \mathbb{C}$ ja $w \neq 0$. Osoita lauseiden 7.4.6 ja 7.5.7 avulla, että

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

b) Määritä seuraavien kompleksilukujen itseisarvot:

$$z = -4i(7+i)(i-1) \qquad w = \frac{6-9i}{3+2i} \qquad u = \frac{3+7i}{2i-4} \cdot \frac{8-6i}{2+5i}$$

Vihje: lause 7.4.6 ja a-kohta.

13. a) Ratkaise kompleksilukujen joukossa yhtälö $4z + 12i = (z-2i)(5+3i)$.

b) Millä kompleksitason käyrällä lausekkeen $2(z+\bar{z})^2 + (8i-16)z$ arvo on reaalinen? Entä puhtaasti imaginaarinen?

Ohje: Merkitse $z = x + yi$, missä x, $y \in \mathbb{R}$, ja tutki, millaisen yhtälön x ja y toteuttavat yllä mainituissa tilanteissa. Tämä yhtälö kertoo, minkä tyyppinen käyrä on kysymyksessä.

Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuun 8.2.

14. Laske lukujonon $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viisi ensimmäistä termiä ja perustele, onko lukujono geometrinen, jos

a) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ ja $a_{n+2} = (n+1)a_{n+1} + n^2 a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

b) $a_0 = 4$ ja $a_n = na_{n-1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

c) $a_0 = 3$ ja $a_{n+1} = 7a_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

15. Oletetaan, että $a, q \in \mathbb{R}$ ja $q \neq 1$. Oletetaan, että $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Osoita induktiolla, että geometrisen sarjan n:s osasumma eli n ensimmäisen termin summa on

$$\sum_{i=0}^{n-1} aq^i = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$