

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016**  
**Harjoitus 2**

Ratkaisut palautettava viimeistään ke 21.9. klo 18.30.  
Korjaukset palautettava viimeistään ke 5.10. klo 18.30.

**Tehtäväsarja I**

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1.4. Kertaa tarvittaessa lukuja 1.1–1.3.

1. Merkitään  $A = \{2, 8, 9\}$ ,  $B = \{z \in \mathbb{Z} : |z| < \sqrt{5}\}$  ja  $C = \{\emptyset, \{1\}, \{6\}, \{1, 6\}\}$ .
  - a) Onko tyhjä joukko  $\emptyset$  eli  $\{ \}$  joukon  $A$ ,  $B$  tai  $C$  alkio?
  - b) Onko tyhjä joukko  $\emptyset$  joukon  $A$ ,  $B$  tai  $C$  osajoukko?
2. Tarkastellaan joukkoa  $A = \{\{8, 9\}, \{\{8\}, 9\}, 4, \{4, 7, 9\}, \{7\}\}$ . Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia? Mitkä ovat epätosia? Muista perustella.

- |               |                   |                           |                                |
|---------------|-------------------|---------------------------|--------------------------------|
| (a) $9 \in A$ | (b) $\{7\} \in A$ | (c) $\emptyset \in A$     | (d) $\{4, \{7\}\} \subset A$   |
| (e) $4 \in A$ | (f) $\{8\} \in A$ | (g) $\emptyset \subset A$ | (h) $\{9, \{8\}\} \subset A$ . |

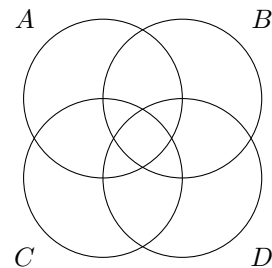
3. Merkitään  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = 0\}$ .
  - a) Olkoon  $A = \{0, 3\}$ . Onko joukko  $A$  joukon  $X$  osajoukko?
  - b) Olkoon  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0\}$ . Päteekö  $B \subset X$ ?Muista aina perustella vastauksesi.

★4. Luettele joukon  $A$  kaikki osajoukot, jos

- |                    |                               |
|--------------------|-------------------------------|
| (a) $A = \{10^9\}$ | (b) $A = \{10, 100, 1000\}$ . |
|--------------------|-------------------------------|

5. a) Joukkojen  $A$  ja  $B$  *symmetrinen erotus* tarkoittaa joukkoa  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . Sille käytetään merkintää  $A \triangle B$ . Piirrä Vennin kaavio joukosta  $A \triangle B$ .

- b) Vennin kaaviot ovat hyvä apuväline joukkoja koskevien väitteiden hahmottamiseen, mutta joukkojen määrän kasvaessa oikeanlaisen kaavion piirtäminen käy vaikeammaksi. Mitä voit esimerkiksi viereisen kaavion perusteella päätellä joukosta  $(A \cap D) \setminus (B \cup C)$ ? Päteekö tämä yleisesti?



**Tehtäväsarja II**

Tutustu kurssimateriaalin luvun 4 alkuosaan. Seuraavat tehtävät liittyvät erityisesti esi-merkkiin 4.1.2.

6. Laske seuraavat summat:

(a) $\sum_{k=3}^7 (k^2 + 3k)$	(b) $\sum_{j=-1}^2 (-2)^j$	(c) $\sum_{n=4}^6 \frac{1}{n-2}$	(d) $\sum_{i=0}^3 7$ .
-------------------------------	----------------------------	----------------------------------	------------------------

7. Esimerkin 4.1.2 mukaan  $\sum_{j=0}^n 2j = 0 + 2 + 4 + \dots + 2n$ .

Kirjoita seuraavat summat samaan tapaan auki ilman summamerkkiä:

(a)  $\sum_{k=3}^m (k^2 + 3k)$       (b)  $\sum_{j=-1}^n (-2)^j$       (c)  $\sum_{i=0}^k i(i+1)$ .

8. Osoita induktiolla, että kaikilla  $n \in \mathbb{N}$  pätee

$$\sum_{i=0}^n i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

### Tehtäväsarja III

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 2.1–2.3.

9. Kirjoita suomeksi, mitä seuraavat propositiolauseet tarkoittavat, jos propositio-symboli  $p_0$  tarkoittaa ”nauran” ja propositiosymboli  $p_1$  tarkoittaa ”olen iloinen”. Tutki totuustaulujen avulla, mitkä niistä ovat loogisesti ekvivalentteja keskenään.

(a)  $p_0 \rightarrow p_1$       (b)  $\neg p_1 \rightarrow \neg p_0$       (c)  $\neg p_0 \vee p_1$       (d)  $p_0 \wedge \neg p_1$

★ 10. Tässä tehtävässä  $I(x)$  tarkoittaa ” $x$  itkee” ja  $N(x)$  tarkoittaa ” $x$  nauraa”. Kirjoita seuraavat kurssin opiskelijoita koskevat väitteet kvanttorien ja loogisten konnektiivien avulla.

- a) Jokainen itkee tai nauraa.
- b) Joku itkee ja nauraa.
- c) Kaikki nauravat eikä kukaan itke.
- d) Jos joku itkee, niin kukaan ei naura.

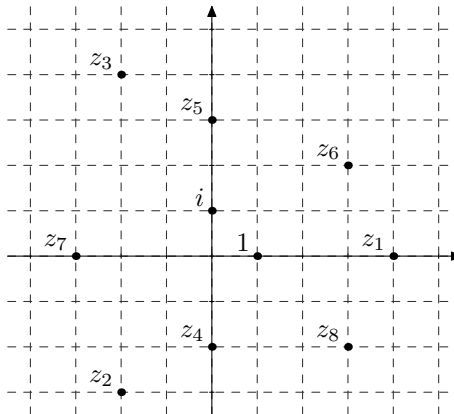
11. Ovatko seuraavat kokonaislukuja koskevat väitteet tosia vai epätosia? Perustele.

(a)  $\exists n(n+3=7)$       (b)  $\exists n(3n+2=6)$   
(c)  $\forall n(n \leq 3n)$       (d)  $\forall n(n^2 > -9)$ .

### Kompleksiluvut

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin lukuihin 7.1–7.5.

12. a) Alla oleva kuva esittää kompleksitasoa. Ruudukon neliöiden sivun pituus on 1. Selvitä jokaisen kuvaan merkityn kompleksiluvun itseisarvo eli moduli.



b) Sievennä seuraavat kompleksiluvut muotoon  $a + bi$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$w_1 = i^{11} \qquad w_2 = (5i - 7)^{-1} \qquad w_3 = \frac{2 - 5i}{1 + 2i}.$$

★ 13. a) Merkitään  $z = -2i(4-i) - (2-3i)^2$ . Määritä luvun  $z$  reaali-osa, imaginaari-osa, itseisarvo ja liittoluku.

b) Oletetaan, että  $z, w \in \mathbb{C}$ . Osoita, että  $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$ .

*Apu: lauseen 7.4.3 a-kohdan todistus.*

### Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Seuraavat tehtävät liittyvät kurssimateriaalin kappaleeseen 8.4.

14. ISSN on jatkuvasti ilmestyvän tekstijulkaisun kansainvälinen tunnus. Se on muotoa  $d_1d_2d_3d_4-d_5d_6d_7d_8$ , missä seitsemän ensimmäistä merkkiä ovat numeroita. Viimeinen merkki  $d_8$  on tarkistusmerkki. Se määräytyy kongruenssista

$$d_8 \equiv \sum_{k=1}^7 (k+2)d_k \pmod{11}.$$

Jos  $d_8 \equiv 10 \pmod{11}$ , merkitään tarkistusmerkiksi X.

a) Tarkista, ovatko seuraavat mahdollisia ISSN-tunnuksia. Onko niissä oikea tarkistusmerkki?

i. 0002-9890

ii. 0355-3967.

b) Selvitä seuraavien ISSN-tunnusten puuttuvat merkit:

i. 07□3-0548

ii. 1798-□584.

★ 15. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkansa kaikilla kokonaisluvuilla  $a$  ja  $b$ , kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $c$  ja  $d$  sekä kaikilla ykköstä suuremmilla kokonaisluvuilla  $m$ ?

a) Jos  $a \equiv b \pmod{m}$ , niin  $ac \equiv bc \pmod{mc}$ .

b) Jos  $a \equiv b \pmod{m}$  ja  $c \equiv d \pmod{m}$ , niin  $a^c \equiv b^d \pmod{m}$ .