

**HY / Matematiikan ja tilastotieteen laitos**  
**Johdatus yliopistomatematiikkaan, syksy 2016**  
**Harjoitus 1**

*Ratkaisut palautettava viimeistään ke 14.9. klo 18.30.*

*Korjaukset palautettava viimeistään ke 28.9. klo 18.30.*

**Tehtäväsarja I**

1. Hanki itsellesi kurssin materiaali kurssisivulta kohdasta Kurssimateriaali ja kirjallisuus. Pidä tästä eteenpäin kurssimateriaalia mukana sellaisessa muodossa, että sinun on helppo lukea sitä. Ohjauksessa ja luennoilla nimittäin pohditaan ongelmia, joiden ratkaisuun tarvitset kurssimateriaalin tietoja.
2. Käy tutustumassa ohjaukseen Exactumin 3. kerroksessa. Selvitä samalla, mistä kansilehtiä saa ja mihin tehtävät palautetaan. Jos ohjaaja on paikalla, käy moikkaamassa häntä. Jos haluat, voit jäädä tekemään tehtäviä 3. tai 4. kerroksen pöytien ääreen.
3. Lue tehtävien palautukseen liittyvät ohjeet kurssisivulta.

**Tehtäväsarja II**

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 1.1.

4. Mitkä seuraavista joukoista ovat samoja?

$$A = \{4, 7\} \quad B = \{2^3 - 1, 9 - 5, 1 + 6, 2 \cdot 2\} \quad C = \{\sqrt{16}, \sqrt{49}\}$$

$$D = \{7, 4, 7\} \quad E = \{303 - 4 \cdot 74, 333 - 7 \cdot 47\} \quad F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 5| = 2\}$$

5. Kirjoita seuraavat joukot luettelemalla niiden kaikki alkiot joukkomerkintää käyttäen.

(a)  $\{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 2 < 15\}$

(b)  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 = 9\}$

- ★6. Kirjoita seuraavat joukot luettelemalla niiden kaikki alkiot joukkomerkintää käyttäen.

(a)  $\{n \in \mathbb{N} \mid n < 99 \text{ ja } n = k^3 \text{ missä } k \in \mathbb{Z}\}$

(b)  $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 1 = 17\}$

**Tehtäväsarja III**

Jatketaan joukkoihin liittyvien merkintöjen harjoittelua.

7. Kirjoita seuraavat joukot ehdon avulla käyttäen merkintää

$$\{x \in X \mid \text{ehto, jonka } x \text{ toteuttaa}\}$$

Laita symbolin  $X$  paikalle aina sopivan lukujoukon symboli.

(a)  $\{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

(b)  $\{0, 4, 8, 12, 16, \dots\}$

- ★8. Kirjoita seuraavat joukot ehdon avulla samaan tapaan kuin tehtävässä edellisessä tehtävässä.

a) Luonnolliset luvut, joiden neliöjuuri on suurempi kuin 4.

b) Rationaaliluvut, jotka ovat luvun 5 kokonaislukupotensseja. (Muista, että myös esimerkiksi luku  $1/25 = 5^{-2}$  on luvun 5 kokonaislukupotenssi.)

## Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuihin 1.2–1.3.

9. Tarkastellaan joukkoja  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 3, 7, 9\}$  ja  $C = \{2, 5, 7\}$ . Määritä

(a)  $(B \cup C) \setminus (B \cap C)$       (b)  $(A \cup B) \setminus C$       (c)  $A \cup (B \setminus C)$ .

10. Olkoon  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 10 \text{ ja } n = 3k \text{ missä } k \in \mathbb{Z}\}$ . Mieti, mitä alkioita joukossa  $A$  on, ja keksi sitten esimerkki joukosta  $B$ , jolla pätee

(a)  $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9\}$     (b)  $A \cap B = \{0, 9\}$     (c)  $A \setminus B = \{0, 3\}$   
(d)  $A \cup B = \{0, 3, 6, 9\}$       (e)  $A \cap B = \emptyset$       (f)  $B \setminus A = \{2, 4, 8\}$ .

## Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuihin 2.1–2.2.

11. Kirjoita seuraavat väitteet propositiolauseina. Korvaa lause jokaisessa väitteessä ensimmäinen osa propositiosymbolilla  $p_0$  ja toinen osa propositiosymbolilla  $p_1$  sekä lisää väliin sopiva konnektiivi. Mitä voit sanoa lauseiden totuudesta? Käytä totuuden selvittämisessä apuna totuustauluja.

(a)  $1 + 1 = 2$  ja  $2 + 3 = 4$ .      (b)  $1 + 1 = 3$  tai  $2 + 2 = 4$ .  
(c) Jos  $0 > 1$ , niin  $5 > 9$ .      (d)  $1 + 1 = 3$ , jos ja vain jos  $5 > 9$ .

★12. Kirjoita seuraavat väitteet propositiolauseina. Korvaa lause ”nauran” propositiosymbolilla  $p_0$  ja lause ”olen iloinen” propositiosymbolilla  $p_1$ . Tutki totuustaulujen avulla, ovatko jotkin väitteistä loogisesti ekvivalentteja keskenään.

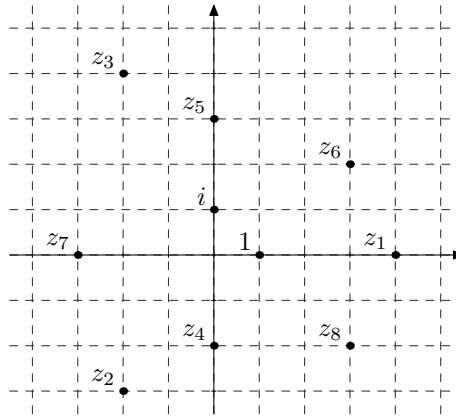
- a) Jos nauran, niin olen iloinen.
- b) Nauran tai en ole iloinen.
- c) Olen iloinen, jos nauran.
- d) Nauran mutta en ole iloinen.

Valitse ainakin toinen seuraavista tehtäväsarjoista. Jos haluat, voit tehdä vaikka kaikki tehtävät.

## Kompleksiluvut

Tutustu kurssimateriaalin lukuihin 7.1–7.3.

13. a) Alla oleva kuva esittää kompleksitasoa. Ruudukon neliöiden sivun pituus on 1. Kirjoita kuvaan merkityt kompleksiluvut  $z_1$ – $z_8$  muodossa  $a + bi$ , missä  $a$  ja  $b$  ovat reaalilukuja.



b) Sievennä seuraavat kompleksiluvut muotoon  $a + bi$ , missä  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$w_1 = (1 - 2i)(2 + i) \qquad w_2 = -2(4 - 5i)^2 - 14i.$$

★ 14. Oletetaan, että  $a \in \mathbb{R}$  ja tarkastellaan lauseketta  $(4 - ai)^2 + 2a(ai - 3)$ .

- Mikä on kyseisen lausekkeen arvo, jos  $a = -2$ ?
- Määritä ne reaaliluvut  $a$ , joilla kyseinen lauseke on reaalinen.
- Määritä ne reaaliluvut  $a$ , joilla kyseinen lauseke on puhtaasti imaginaarinen.

### Tietojenkäsittelytieteen ja tilastotieteen matematiikkaa

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 8.4.

15. Laske ja kirjoita perusteluksi vastaava jakoyhtälö:

- (a)  $13 \bmod 3$       (b)  $155 \bmod 9$       (c)  $-97 \bmod 11$       (d)  $-221 \bmod 23$ .

★ 16. Merkitään  $X = \{0, 1, 2, \dots, 28\}$ .

- Salaa viesti EI HÄTÄÄ funktion  $f: X \rightarrow X$ ,  $f(n) = (11n + 2) \bmod 29$ , avulla. Muuta kirjaimet ensin luvuiksi niin, että kirjainta  $A$  vastaa luku 0, kirjainta  $B$  luku 1 jne. alla olevan taulukon mukaisesti. Tämän jälkeen tee varsinainen salaus muuntamalla saamasi luvut funktiolla  $f$ . Muuta näin saamasi luvut jälleen kirjaimiksi, jolloin salattu viesti on valmis.
- Viesti QYG JYF JCO D on muodostettu käyttämällä salaamiseen yksinkertaisempaa funktiota  $g: X \rightarrow X$ , jolla  $g(n) = (n + 24) \bmod 29$  (tässä on kysymyksessä ns. Caesarin salakirjoitus). Pura salaus ja selvitä, mitä viestissä sanotaan.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Å	Ä	Ö	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	