Järjestetty pari

Joukossa alkioiden järjestyksellä ei ole väliä: esimerkiksi

$$\{3, 8\} = \{8, 3\}\,.$$

Jos alkioiden järjestyksellä on väliä, voidaan kahden alkion tapauksessa käyttää ns. *järjestettyä paria*. Sille käytetään merkintää (a, b) ja sille pätee:

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{jos ja vain jos} \quad a = c \ \text{ ja } \ b = d\,.$$

Siis esimerkiksi $(3, 8) \neq (8, 3)$.

Joukkojen karteesinen tulo eli tulojoukko

Määritelmä

Oletetaan, että A ja B ovat joukkoja. Joukkojen A ja B *karteesinen tulo* eli *tulojoukko* on joukko

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ ja } b \in B \}.$$

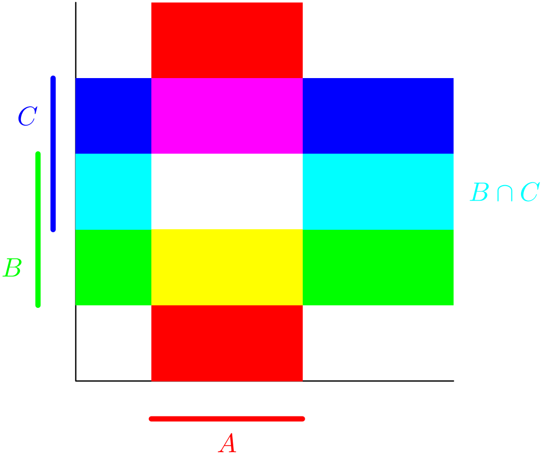
Joukkojen karteesinen tulo eli tulojoukko

Esimerkki 14

(a) Osoita, että $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ kaikilla joukoilla A, B ja C.

(b) Havainnollista kuvan avulla.

Havainnollistus:



Tässä joukkoa $A \times (B \cap C)$ vastaa keskelle jäävä valkoinen alue. Havaitaan, että se on myös joukkojen $A \times B$ (keltainen & valkoinen alue) ja $A \times C$ (violetti & valkoinen alue) leikkaus.

(a) Oletetaan, että A, B ja C ovat joukkoja.

Väite: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Todistus.

"$\subset$": Oletetaan, että $x \in A \times (B \cap C)$. Tällöin $x = (s, t)$, missä $s \in A$ ja $t \in B \cap C$. Koska $t \in B \cap C$, niin $t \in B$ ja $t \in C$.

Koska $s \in A$ ja $t \in B$, niin $x = (s, t) \in A \times B$. Vastaavasti koska $s \in A$ ja $t \in C$, niin $x = (s, t) \in A \times C$. Leikkauksen määritelmän mukaan tällöin $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

"$\supset$": Oletetaan, että $y \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Tällöin $y \in A \times B$ ja $y \in A \times C$. Siten $y = (a, d)$, missä $a \in A$, $d \in B$ ja $d \in C$. Tällöin $d \in B \cap C$. Koska $a \in A$ ja $d \in B \cap C$, niin tulojoukon määritelmän mukaan $y = (a, d) \in A \times (B \cap C)$. $\square$