Luonnolliset luvut

Luonnolliset luvut voidaan määritellä *Peanon aksioomien* avulla:

Luonnollisten lukujen joukolla $\mathbb{N}$ on seuraavat ominaisuudet:

1. Nolla on luonnollinen luku; ts. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Jokaista luonnollista lukua n kohti on olemassa täsmälleen yksi luonnollinen luku $s(n)$, jota sanotaan luvun n *seuraajaksi*.
3. Nolla ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja; ts. $0 \neq s(n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.
4. Eri luvuilla on eri seuraajat; ts. jos $m \neq n$, niin $s(m) \neq s(n)$.
5. Oletetaan, että $A \subset \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että $0 \in A$, ja että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee: jos $n \in A$, niin $s(n) \in A$. Tällöin $A = \mathbb{N}$.

Induktioperiaate

Induktioaksioomasta saadaan johdettua I induktioperiaate, joiden avulla voidaan todistaa luonnollisia lukuja koskevia väitteitä.

Lause 3 (I induktioperiaate)

Oletetaan, että seuraavat ehdot ovat voimassa:

1. Luvulla 0 on ominaisuus P.
2. Kaikilla luonnollisilla luvuilla pätee:
   jos luvulla n on ominaisuus P, niin sitä seuraavalla luvulla $n+1$ on ominaisuus P.

Tällöin kaikilla luonnollisilla luvuilla on ominaisuus P.

Induktioperiaate

Havainnollistus:

Järjestän (äärettömän määrän) dominonappuloita jonoon niin, että yhden kaatuminen aiheuttaa aina seuraavan kaatumisen. Jos kaadan ensimmäisen, niin kaikki nappulat kaatuvat.

Implikaation totuustaulu

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Induktiotodistus

Todistukset vaiheet:

1. Alkuaskel: Varmistetaan, että asia P pätee luvulle 0.
2. Induktioaskel:
   - ⋆ Tehdään *induktio-oletus*, että $k \in \mathbb{N}$ ja asia P pätee luvulle k.
   - ⋆ Näytetään, että induktio-oletuksesta ja mahdollisista muista oletuksista seuraa, että tällöin asia P pätee myös seuraavalle luonnolliselle luvulle $k + 1$.
3. Johtopäätös: Alkuaskeleesta ja induktioaskeleesta seuraa induktioperiaatteen nojalla, että asia P pätee kaikille $n \in \mathbb{N}$.

Kvanttorit

$\forall$	kaikilla
$\exists$	on olemassa

Kvanttorit ja negaatiot

Yhteenveto:

- Lause $\neg\forall x\, P(x)$ on loogisesti ekvivalentti lauseen $\exists x\, \neg P(x)$ kanssa.
- Lause $\neg\exists x\, P(x)$ on loogisesti ekvivalentti lauseen $\forall x\, \neg P(x)$ kanssa.