Johdatus logiikkaan II

Harjoitus 6

1. Näytä, että $\vdash \exists x_0 \forall x_1 R(x_0, x_1) \to \exists x_0 R(x_0, F(x_0))$.

2. Näytä, että $\{\exists x_0 \forall x_1 x_0 = x_1\} \vdash \forall x_3 \forall x_4 x_3 = x_4$. Vihje: Mieti ensin mitä oletus tarkoittaa.

3. Olkoon $M = (\mathbb{N}, F^M, G^M, c_0^M, c_1^M)$, missä $F^M(n) = n+2$, $G^M(n,m) = n+m$, $c_0^M = 0$ ja $c_1^M = 5$. Olkoon lisäksi s tulkintafunktio, jolla $s(x_n) = n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Määritä termin t arvot $t^M < s >$ kun:

(a) $t = F(x_1)$,

(b) $t = F(G(c_0, c_1))$,

(c) $t = G(x_4, F(c_0))$,

(d) $t = G(F(x_1), F(x_5))$.

4. Olkoon $\mathbf{Z}$ kokonaislukujen joukko ja $M = (\mathbf{Z}, F^M, c^M, d^M)$, missä $F^M(n,m) = n + m$, $c^M = 0$ ja $d^M = 1$.

(a) Mitkä mallin M alkiot ovat vakiotermien tulkintoja? (Termi t on vakiotermi jos siinä ei esiinny muuttujia.)

(b) Mille mallin M alkioille n pätee. että $\{n\}$ on määriteltävä? (Kun $\{n\}$ on määriteltävä, usein sanotaan että n on määriteltävä.)

Jos $G = (dom(G), +, e)$ ja $H = (dom(H), +, e)$ ovat ryhmiä niin $G \times H$ on ryhmä, jonka universumi on $dom(G) \times dom(H)$ ja jossa laskutoimitus $+$ on määritelty niin, että $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ ja neutraalialkio on (e,e).

5. Ovatko ryhmät $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ja $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (katso harjoitusten 1 tehtävä 3) isomorfiset?

6. Ovatko ryhmät $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ja $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ isomorfiset?