

Johdatus logiikkaan II

Harjoitus 1

Joissain allaolevista tehtävistä on luonnollista käyttää funktiosymboleita, joten ei tarvitse rajoittua aakkostoihin, joissa on vain vakiosymboleita ja 1- ja 2-paikkaisia relaatio-symboleita.

1. Olkoon R 2-paikkainen relaatio-symboli, c vakiosymboli, aakkosto $L = \{R, c\}$ ja $M = \mathbb{N}^2$. Onko $\mathbf{M} = (M, R^{\mathbf{M}}, c^{\mathbf{M}})$ L -malli kun
 - (a) $R^{\mathbf{M}} = \{((x, y), (a, b)) \mid x, y, a, b \in \mathbb{N}, x + y = a + b\}$ ja $c^{\mathbf{M}} = 0$,
 - (b) $R^{\mathbf{M}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$ ja $c^{\mathbf{M}} = (4, 26)$.
2. Tarkastellaan shakkilautaa (ilman nappuloita). Miten esittäisit shakkilaudan monisteen luvun 1 mukaisena mallina niin, että kyseinen malli sisältää ainakin kaiken pelaamisessa tarvittavan tiedon laudasta? Mikä on käyttämäsi aakkosto?
3. Olkoon \mathbf{Z} kokonaislukujen joukko ja määritellään ryhmä $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ seuraavasti: Olkoon E ekvivalenssirelaatio (kongruenssi) joukossa \mathbf{Z} jolla $(x, y) \in E$ jos $x - y$ on jaollinen kolmella ja merkitään $[x] = \{y \in \mathbf{Z} \mid (x, y) \in E\}$. Ryhmän $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ alkiona ovat ekvivalenssiluokat (sivuluokat) $[x]$, $x \in \mathbf{Z}$, ja laskutoimitus määritellään $[x] + [y] = [x + y]$ (tämä on hyvin määritelty). Miten esittäisit tämän ryhmän monisteen luvun 1 mukaisena mallina? Mikä on aakkosto?
4. Tutustu Wikipedian artikkeliin ”Hila (matematiikka)”. Miten valitsisit aakkoston hiloille? Anna esimerkki hilasta esitettynä monisteen luvun 1 mukaisena mallina. Wikipedian artikkeli näyttää tarjoavan ainakin kahta eri vaihtoehtoa aakkostoksi. Mieti miksi tämä ei ole ongelma.
5. Tutustu Wikipedian artikkeliin ”Affine plain (incidence geometry)”. Miten valitsisit aakkoston affineille tasoille? Anna esimerkki affiinista tasosta esitettynä monisteen luvun 1 mukaisena mallina.
6. Mieti millaisia matematiikan (tyylisiä) rakenteita olet kohdannut opinnoisiasi (topologia, tietokanta, laatoistus,...) ja esitä jokin niistä monisteen luvun 1 mukaisena mallina.