Johdatus logiikkaan 2

Åsa Hirvonen

Kevät 2016

Sisältö

Johdanto

Tarkastellaan seuraavaa päättelyä

$$\begin{array}{l} \text{Kaikki kissat ovat nisäkkäitä.} \\ \text{Karvinen on kissa.} \\ \hline \text{Siispä Karvinen on nisäkäs.} \end{array}$$

Päättely näyttää ilmeisen pätevältä. Kuitenkin, jos yritetään formalisoida se propsoitiologiikalla, saadaan päättely

$$\begin{array}{l} p_0 \\ p_1 \\ \hline p_2 \end{array}$$

Tämä päättely ei ole pätevä, koska $(p_0 \wedge p_1) \to p_2$ ei ole tautologia. Ongelmana on, että propositiologiikka 'näkee' vain lauseita, ei lauseen tarkastelun kohteena olevia objekteja.

Predikaattilogiikassa voidaan puhua objekteista. Tämä tehdään *muuttujien* avulla. Kun propositiologiikassa totuus määräytyy totuusjakauman peursteella, predikaattilogiikassa semantiikan ytimessä on muuttujien saamat arvot. Mitä muuttujalla x tarkoitetaan? Eri asioita eri tilanteessa, mutta yhteistä on, että sen saamat arvot tulevat jostakin *mallista*.

1 Mallit ja aakkostot

1.1 Mallit

Logiikassa malli (tai struktuuri) on joukko varustettuna jonkinlaisella rakenteella. Malli merkitään jonona

$$\mathcal{M} = (M, \text{ mallin rakenteen osat}),$$

missä $M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ on mallin *universumi* (eng. domain), joka voi olla mikä tahansa epätyhjä joukko. Rakenne voi koostua esimerkiksi nimetyistä osajoukoista

$$\mathcal{M} = (\text{kurssin opiskelijat, tummatukkaiset, villasukkia käyttävät}),$$

tai se voi olla lineaarijärjestys

$$\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq)$$

tai ryhmän laskutoimitus

$$\mathcal{G} = (G, \circ).$$

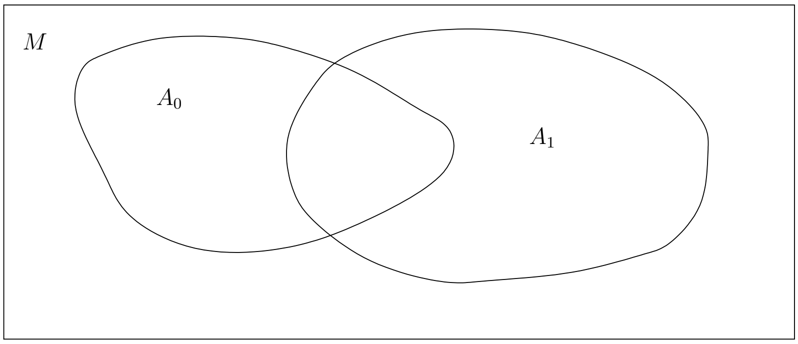
Tarkastellaan hieman tarkemmin muutamaa esimerkkiä ennen virallista mallin määritelmää.

Yksinkertaisimmissa malleissa, ns. *unaarisissa struktuureissa*, rakenteen muodostavat annetut osajoukot eli *predikaatit*.

Unaarisia malleja voivat olla esimerkiksi

- luokan opiskelijat ja sen osajoukot 'silmälaseja käyttävät' ja 'vaaleatukkaiset',
- aakkosten kirjaimet ja sen osajoukko 'vokaalit',
- luonnolliset luvut ja sen osajoukot 'parilliset' ja 'seitsemällä jaolliset.

Kuvassa 1 on esitetty malli, jossa on kaksi predikaattia, A_0 ja A_1. Predikaatti jakaa aina mallin kahteen osaan: predikaattiin itseensä sekä sen komplementtiin. Näistä toinen voi toki olla tyhjä (muttei molemmat, mallin universumi on aina epätyhjä). Siten kaksi predikaattia jakaa mallin universumin neljään erilliseen osaaan.



Kuva 1: Malli, jossa on kaksi yksipaikkaista predikaattia.

Esimerkki 1.1. Esimerkki unaarisesta mallista voisi olla malli, jonka universumi on kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ja jossa on kolme predikaattia. A_0 koostuu parillisista kokonaisluvuista, A_1 koostuu negatiivisista kokonaisluvuista ja A_2 koostuu niistä kokonaisluvuista, joiden neliöjuuri on kokonaisluku. Nyt huomataan, että $A_2 \subset A_1^c$, missä A_1^c:llä merkitään joukon A_1 *komplementtia* $\mathbb{Z} \setminus A_1$. Näin ollen predikaatit jakavat mallin universumin seuraavaan kuuteen osaan:

$A_0 \cap A_1$ parilliset negatiiviset luvut,
$A_0^c \cap A_1$ parittomat negatiiviset luvut,
$A_0 \cap A_1^c \cap A_2$ parilliset neliöluvut ja nolla,
$A_0 \cap A_1^c \cap A_2^c$ parilliset positiiviset luvut, jotka eivät ole kokonaisluvun neliöitä,
$A_0^c \cap A_1^c \cap A_2$ parittomat neliöluvut,
$A_0^c \cap A_1^c \cap A_2^c$ parittomat positiiviset luvut, jotka eivät ole kokonaisluvun neliöitä.

Unaarisia struktuureja voidaan siten yleisesti havainnollistaa Venn-diagrammeilla.

Yksipaikkaisia predikaatteja (eli osajoukkoja) voidaan nähdä erikoistapauksena paljon yleisemmästä relaation käsitteestä. Olkoon M joukko. Joukon M n-*kertainen karteesinen tulo*, M^n, on joukko

$$M \times M \times \cdots \times M,$$

missä joukko M toistuu n kertaa. Siis $M^1 = M$, $M^2 = M \times M$ koostuu kaikista pareista (m_1, m_2), missä $m_1, m_2 \in M$ ja yleisemmin M^n koostuu koostuu kaikista M:n alkioiden n-jonoista (kun $n > 1$):

$$M^n = \{(m_0 \ldots, m_{n-1}) : m_0, \ldots, m_{n-1} \in M\}.$$

Joukon M n*-paikkainen relaatio* on mikä tahansa joukon M^n osajoukko. Matematiikassa erityisen tavallisia ovat kaksipaikkaiset relaatiot.

Esimerkki 1.2. Joukon A lineaarijärjestys on kaksipaikkainen relaatio $\leq$, joka toteuttaa seuraavat vaatimukset:

1. (refleksiivisyys) $a \leq a$ kaikilla $a \in A$,
2. (antisymmetrisyys) jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$,
3. (transitiivisuus) jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$,
4. (totaalisuus) kaikilla $a, b \in A$ joko $a \leq b$ tai $b \leq a$.

Esimerkiksi luonnollisten lukujen tavallinen järjestys on lineaarijärjestys. Tämä muodostaa mallin, jonka universumi on $\mathbb{N}$ ja jossa on kaksipaikkainen relaatio $\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 : a \leq b\}$.

Esimerkki 1.3. Joukon A ekvivalenssirelaatio on kaksipaikkainen relaatio $\sim$, joka toteuttaa seuraavat vaatimukset:

1. (refleksiivisyys) $a \sim a$ kaikilla $a \in A$,
2. (symmetrisyys) jos $a \sim b$, niin $b \sim a$,
3. (transitiivisuus) jos $a \sim b$ ja $b \sim c$, niin $a \sim c$.

Esimekkejä ekvivalenssirelaatioista ovat esimerkiksi lukujen kongruenssi modulo n, tai ominaisuus 'olla kotoisin samalta paikkakunnalta'.

Esimerkki 1.4. *Verkko* koostuu pisteistä (solmuista) ja niitä yhdistävistä viivoista (särmistä) . Kuvassa 2 on esitetty kaksi verkkoa. Kun verkkoja tarkastellaan malleina, universumin muodostavat verkon pisteet ja viivoja tarkastellaan kaksipaikkaisena symmetrisenä relaationa, jossa pistepari kuuluu relaation, jos ja vain jos pisteiden välillä on viiva.

Kuva 2: Kaksi verkkoa.

Esimerkki 1.5. Relaatioilla voidaan mallintaa myös arkisempia ilmiöitä. Olkoon I kaikkien ihmisten joukko. Tällöin voidaan määritellä relaatiot

$$\begin{aligned} Sisarus &= \{(x,y) \in I^2 : x \text{ ja } y \text{ ovat sisaruksia}\} \\ Isa &= \{(x,y) \in I^2 : x \text{ on } y\text{:n isä}\} \\ Aiti &= \{(x,y) \in I^2 : x \text{ on } y\text{:n äiti}\} \end{aligned}$$

Relaatiot voivat myös olla useampipaikkaisia.

Esimerkki 1.6. Tarkastellan reaalilukujen joukon relaatiota

$$\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a - b = c - d\}.$$

Tämä on nelipaikkainen relaatio, joka koostuu niistä neljän alkion jonoista (a,b,c,d), joilla $a - b = c - d$. Esimerkkejä tällaisista jonoista ovat $(1,2,3,4)$, $(1,1,\pi,\pi)$ ja $(2\sqrt{3},\sqrt{3},3\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

Esimerkki 1.7. Laskutoimituksia voidaan esittää kolmipaikkaisten relaatioiden avulla (joskin luontevampi tapa yleensä on käyttää funktioita, ks. luku 9). Tarkastellaan kokonaislukujen joukkoa $\mathbb{Z}$ ja määritellään siinä kolmipaikkainen relaatio

$$\{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b = c\}.$$

Tämä relaatio koodaa kokonaislukujen yhteenlaskun (vastaa laskutoimituksen $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ kuvaajaa).

Malleissa voi osajoukkojen ja relaatioiden lisäksi olla myös vakioita (nimettyjä alkioita) ja funktioita. Näiden avulla on yleensä luontevinta mallintaa algenrallisia rakenteita kuten ryhmiä, renkaita ja kuntia. Vakioita tarkastellaan aakkostojen yhteydessä, mutta funktioita vasta luvussa 9.

1.2 Aakkostot ja L-mallit

Sen, mitä rakennetta mallissa on, määrää mallin *aakkosto*. Aakkosto on joukko symboleita, jotka voivat olla

- yksi- tai useampipaikkaisia relaatiosymboleita $R_0^k, R_1^k, R_2^k, \ldots$, missä k ilmaisee relaation paikkaluvun,
- funktiosymboleita $f_0^k, f_1^k, f_2^k, \ldots$, missä k ilmaisee funktion paikkaluvun (argumenttien lukumäärän),
- vakiosymboleita $c_0, c_1, c_2, \ldots$

Keskitytään aluksi aakkostoihin, joissa ei ole funktiosymboleita. Notaation helpottamiseksi käytetään myös merkintää $P, P_0, P_1, \ldots$ predikaateille (eli yksipaikkaisille relaatioille) ja $R, R_0, R_1, \ldots$ useampipaikkaisille (yleensä kaksipaikkaisille) relaatioille.

Nyt voidaan malli määritellä virallisesti:

Määritelmä 1.8. Aakkoston L *malli* (tai lyhyemmin L-malli) $\mathcal{M}$ koostuu

- epätyhjästä joukosta M, joka on mallin *universumi*; merkitään usein $\mathrm{dom}(\mathcal{M})$,
- jokaista n-paikkaista relaatiosymbolia $R \in L$ kohti vastaavasta joukon M^n osajoukosta $R^{\mathcal{M}}$,
- jokaista vakiosymbolia $c \in L$ kohti vastaavasta M:n alkiosta $c^{\mathcal{M}}$,
- jokaista n-paikkaista funktiosymbolia $f \in L$ kohti vastaavasta funktiosta $f^{\mathcal{M}} : M^n \to M$.

Tässä vaiheessa kurssia käsitellään vain yksi- ja kaksipaikkaisia relaatioita ja vakioita, jolloin mallissa $\mathcal{M}$ on

- epätyhjä universumi M,
- predikaattisymboleita P_i vastaavat M:n osajoukot $P_i^{\mathcal{M}}$,
- relaatiosymboleita R_i vastaavat (kaksipaikkaiset) relaatiot $R_i^{\mathcal{M}}$,
- vakiosymboleita c_i vastaavat alkiot $c_i^{\mathcal{M}}$.

Relaatioita $R^{\mathcal{M}}$ sanotaan relaatiosymbolin R *tulkinnaksi* mallissa $\mathcal{M}$. R on siis pelkkä symboli, nimi relaatiolle, ja $R^{\mathcal{M}}$ on relaatio, eli joukko M:n alkiopareja. Annetun aakkoston L eri malleilla on siten samat relaatiosymbolit käytössä, mutta symboleille on eri tulkinnat. Mallin jonoesityksessä kirjoitetaan malli universuminsa ja symbolien tulkintojen jonona:

Aakkosto L	L-malli $\mathcal{M}$	Esimerkki mallista
P	$\mathcal{M} = (M, P^{\mathcal{M}})$	($\mathbb{N}$, parill. luonn. luvut)
P_0, P_1, R_0, c_0	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, P_1^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}})$	($\mathbb{Z}, \mathbb{N}$, alkuluvut, $\leq, 0$)
P_0, R_0, f_0, c_0, c_1	$\mathcal{M} = (M, P_0^{\mathcal{M}}, R_0^{\mathcal{M}}, f_0^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$	$(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \leq, \lvert\cdot\rvert, 0, 1)$
jne.		

2 Kaavat

Propositiologiikassa rakennettiin lauseita yksinkertaisista väitteistä, joiden totuusarvoja tarkasteltiin toisistaan riippumattomina. Predikaattilogiikan kaavat puolestaan ilmaisevat ominaisuuksia ja suhteita mallin alkioiden välillä. Tämä saavutetaan toisaalta sallimalla aivan uudenlaisia atomikaavoja, toisaalta käyttämällä konnektiiven lisäksi kvanttoreita yhdistettyjen kaavojen muodostuksessa.

Kun propositiologiikassa käytettävä merkistö on aina sama, predikaattilogiikan kaavojen symbolit riippuvat siitä, minkä aakkoston malleja halutaan tarkastella. Predikaattilogiikan kaavoissa käytetään seuraavia symboleita:

Muuttujia: $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (käytännössä usein $x, y, z, \ldots$)
Sulkeita: (,)
Konnektiiveja: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
Kvanttoreita: $\forall, \exists$
Yhtäsuuruutta: $=$
Aakkoston symboleita (aakkostosta riippuen vakiosymboleita $c_0, c_1, \ldots,$
relaatiosymboleita $R_0, R_1, \ldots$ ja/tai funktiosymboleita $f_0, f_1, \ldots$

Kuten propositiologiikassa predikaattilogiikan kaavat rakennetaan induktiivisesti lähtien atomaarisista väitteistä. Predikaattilogiikassa atomikaavat ilmaisevat muuttujien ja vakioiden ominaisuuksia, kuten

- $Sisarus(x, y)$
- $x = z$
- $y < 3$
- $R_0(x, c)$

Intuitiivisesti kaava $R_0(x, c)$ 'sanoo', että ne alkiot, joita x ja c vastaavat ovat R_0:aa vastaavassa relaatiossa. Kuten yleensä, on tärkeää tehdä ero syntaksin (kaavojen ulkoasun merkkijonona) ja semantiikan välillä. Täsmällinen tulkinta sille, mitä $R_0(x, c)$ merkitsee saadan vasta, kun kiinnitetään tarkasteltava malli ja tulkinnat olioille x ja c. Tätä tarkastellaan luvussa 3.

Olioita, joista kaavat 'puhuvat' ($x, y, z, 3$ ja c ylläolevassa esimerkissä) sanotaan *termeiksi*. Jos aakkostossa ei ole funktiosymboleita, termejä ovat muuttujat ja aakkoston vakiosymbolit.

Määritelmä 2.1. Olkoon L aakkosto ilman funktiosymboleita. Tällöin L*-termit* ovat

- muuttujat $x_0, x_1, \ldots,$
- aakkoston L vakiosymbolit.

Jos aakkostossa on funktiosymboleita, termien joukosta tulee monimuotoisempi. Tähän palataan luvussa 9

Määritelmä 2.2. Jos L on aakkosto, L*-atomikaavat* määritellään seuraavasti:

1. Jos t ja u ovat L-termejä, niin $t = u$ on L-atomikaava.
2. Jos $R \in L$ on n-paikkainen relaatiosymboli, ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat aakkoston L termejä, niin $R(t_1, \ldots, t_n)$ on L-atomikaava.

Ylläoleva atomikaavan määritelmä pätee myös funktiosymboleita sisältävälle aakkostolle, ainoa muutos tulee siinä, että termit tällaisessa tapauksessa voivat olla monimutkaisempia kuin vakiosymboleita ja muuttujia.

Esimerkki 2.3. Olkoon $L = \{P, R, c\}$. Tällöin L-termejä ovat vakiosymboli c sekä kaikki muuttujat $x_0, x_1, \ldots$. L-atomikaavoja ovat esimerkiksi

- $x_0 = x_1$
- $R(x_0, x_1)$
- $P(x_0)$
- $x_0 = c$
- $P(c)$
- $R(c, c)$

Atomikaavat ovat siten tapa ilmaista yksinkertaisia asiantiloja malleissa, kuten "x on predikaatissa P" ja "x ja c ovat relaatiossa R". Jotta tämä olisi täsmällistä on toki ensin kiinnitettävä, mitä x:llä, c:llä P:llä ja R:llä tarkoitetaan. Palataan tähän seuraavassa luvussa, mutta katsotaan ensin, miten atomikaavoista rakennetaan monimutkaisempia kaavoja konnektiivien ja kvanttoreiden avulla.

Määritelmä 2.4. Olkoon L aakkosto. L-kaavojen joukko määritellään seuraavasti:

1. L-atomikaavat ovat L-kaavoja.
2. Jos A ja B ovat L-kaavoja, niin myös kaavat
$$\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \to B) \text{ ja } (A \leftrightarrow B)$$
ovat L-kaavoja.
3. Jos A on L-kaava, niin myös kaavat $\forall x_i A$ ja $\exists x_i A$ ovat L-kaavoja kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

Konnektiivien merkitys on sama kuin propositiologiikassa. Kvanttorit tuovat uuden ilmiön. Kaava $\forall x A$ ilmaisee, että kaikki (tarkasteltavan mallin) alkiot toteuttavat kaavan A. Kaava $\exists x A$ puolestaan ilmaisee, että jokin alkio toteuttaa kaavan A. Siirytään seuraavaksi määrittelemään tämä intuitiivinen idea tarkasti.

3 Semantiikka

3.1 Tulkintafunktiot

Tarkastellaan aakkoston $\{P\}$ kaavaa
$$P(x).$$

Intuitiivisesti kaava ilmaisee, että x:ää vastaava alkio on symbolia P vastaavassa predikaatissa. Mutta mikä vastaa P:tä ja x:ää? Toinen näistä kiinnitetään, kun valitaan tarkasteltava L-malli $\mathcal{M}$. Tällaisessa mallissa on aina tulkinta aakkoston symboille P, eli universumin osajoukko $P^{\mathcal{M}}$. Mutta x:n arvoa $\mathcal{M}$ ei ratkaise, vaan tähän tarvitaan *tulkintafunktio*. Se on yksinkertaisesti funktio, joka antaa muuttujille arvoksi alkion. Koska alkion pitää aina olla tarkateltavan mallin universumissa, tulkintafunktio on mallikohtainen.

Määritelmä 3.1. Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. $\mathcal{M}$*-tulkintafunktio* on funktio

$$s : \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \to \mathrm{dom}(\mathcal{M}).$$

Esimerkki 3.2. Olkoon $L = \{R, c\}$. Tarkastellaan L-mallia $\mathcal{Z} = (\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}}, 0)$. Sen universumina on kokonaislukujen joukko $\mathbb{Z}$ ja aakkoston symbolien tulkinnat ovat

$$\begin{aligned} &R^{\mathcal{Z}} = <_Z = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : a < b\}, \\ &c^{\mathcal{Z}} = 0. \end{aligned}$$

Muuttujille x_0, x_1, x_2 voidaan eri tulkintafunktioilla antaa eri arvoja, esim.

- $s_0(x_0) = 2$, $s_0(x_1) = 6$ ja $s_0(x_2) = 2$,
- $s_1(x_0) = 3$, $s_1(x_1) = 0$, $s_1(x_2) = 1$.

Huomataan, että $s_0(x_0) = s_0(x_2)$, joten s_0:n tulkinnan mukaan x_0 ja x_2 tarkoittavat samaa alkiota. Sanotaan, että s_0 toteuttaa kaavan $x_0 = x_2$ (modollinen määritelmä seuraa hieman alempana). Vastaavasti nähdään, että $s_1(x_1) = c^{\mathbb{Z}}$, joten s_1 toteuttaa kaavan $x_1 = c$.

Kaavan tulkitsemisen kohdalla nähdään muuttujien ja vakiosymboleiden ero. Syntaktisesti niitä käsitellään aivan samalla tavalla; ne ovat termejä, joita voi käyttää relaatiosymboleiden tai yhtäsuuruusmerkin kanssa atomikaavojen muodostamiseksi. Mutta vakio kiinnitetään heti, kun valitaan tarkasteltava malli. Muuttujan arvo sen sijaan voi vaihdella samassa mallissa: eri tulkintafunktiot voivat antaa sille eri alkioita arvoksi.

3.2 Termin tulkinta

Kun malli on kiinnitetty ja muuttujille on määritelty arvo, voidaan määritellä termin arvo kaikille L-termeille. Termin arvon notaatiota ei pidä säikähtää, vaikka se aluksi monimutkaiselta näyttääkin. Termin arvo riippuu termistä, mallista ja tulkintafunktiosta, joten notaation tulee sisältää nämä kaikki, mutta itse idea on varsin yksinkertainen: Jos termi on vakiosymboli, termin arvo on vastaava vakio mallissa. Jos termi on muuttuja, sen arvon määrää tulkintafunktio. Funktiosymboleita sisältävien termien arvo määritellään luvussa 9.

Määritelmä 3.3. Olkoon L aakkosto, joka ei sisällä funktiosymboleita. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Termin t *arvo mallissa* $\mathcal{M}$ *tulkintafunktiolla* s, $t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$, on

$$t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle = \begin{cases} s(x_i) & \text{jos } t = x_i \\ c_i^{\mathcal{M}} & \text{jos } t = c_i. \end{cases}$$

3.3 Kaavojen toteutuminen

Nyt voidaan määritellä atomikaavan toteutuminen annetussa mallissa annetulla tulkintafunktiolla.

Määritelmä 3.4. Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Olkoot $t, t_1, \ldots, t_n$ L-termejä.

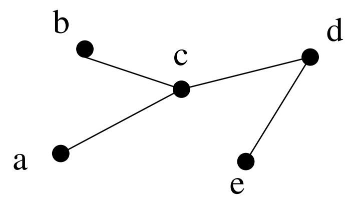
1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $t_1 = t_2$ mallissa $\mathcal{M}$, joss
$$t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle.$$

2. Jos P on yksipaikkainen relaatiosymboli (eli predikaattisymboli), tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $P(t)$ mallissa $\mathcal{M}$, joss
$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \in P^{\mathcal{M}}.$$

3. Jos R on n-paikkainen relaatiosymboli ja $n > 1$, tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $R(t_1, \ldots, t_n)$ mallissa $\mathcal{M}$, joss
$$(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in R^{\mathcal{M}}.$$

Esimerkki 3.5. Olkoon $L = \{P\}$ ja $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, \mathbb{P})$, missä $\mathbb{P}$ merkitsee alkulukujen joukkoa. Tällöin $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s toteuttaa kaavan
$$P(x_i)$$
mallissa $\mathcal{M}$, joss $s(x_i) \in \mathbb{P}$, koska
$$x_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i).$$

Esimerkki 3.6. Olkoon $\mathcal{G}$ kuvan 3 verkko. Verkko on aakkoston $\{E\}$ malli, mis-



Kuva 3: Verkko $\mathcal{G}$.

sä E on kaksipaikkainen relaatiosymboli. Jos nyt s_0, s_1 ja s_2 ovat seuraava $\mathcal{G}$-tulkintafunktiot

	x	y
s_0	a	b
s_1	d	e
s_2	c	c

niin

- tulkintafunktio s_1 toteuttaa kaavan $E(x, y)$ verkossa $\mathcal{G}$, koska solmujen d ja e välillä on särmä, eli $(d, e) \in E^{\mathcal{G}}$,
- tulkintafunktiot s_0 ja s_2 eivät toteuta kaavaa $E(x, y)$ verkossa $\mathcal{G}$, koska parit (a, b) ja (c, c) eivät vastaa särmiä verkossa $\mathcal{G}$, eli $(a, b) \notin E^{\mathcal{G}}$ ja $(c, c) \notin E^{\mathcal{G}}$,
- s_2 toteuttaa kaavan $x = y$ verkossa $\mathcal{G}$, koska $s_2(x) = c = s_2(y)$.

Konnektiiveja tulkitaan samoin kuin propositiologiikassa:

Määritelmä 3.7. Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Tällöin

1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\neg A$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos s ei toteuta kaavaa A mallissa $\mathcal{M}$.
2. Tulkintafunktio s toteuttaa kaava $(A \wedge B)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos se toteuttaa sekä kaavan A että kaavan B mallissa $\mathcal{M}$.
3. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \vee B)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos se toteuttaa ainakin toisen kaavoista A ja B mallissa $\mathcal{M}$.
4. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \to B)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos se ei toteuta kaavaa A tai toteutta kaavan B mallissa $\mathcal{M}$.
5. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $(A \leftrightarrow B)$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos se joko toteuttaa sekä A:n että B:n tai ei toteuta kumpaakaan mallissa $\mathcal{M}$.

Esimerkki 3.8. Tarkastellaan taas kuvan 3 verkkoa ja seuraavia $\mathcal{G}$-tulkintafunkitoita

	x	y	z
s	b	c	d
s'	c	e	e

Nyt s toteuttaa kaavan $E(x, y)$, koska $(s(x), s(y)) = (b, c) \in E^{\mathcal{G}}$, sekä kaavan $E(y, z)$, koska $(s(y), s(z)) = (c, d) \in E^{\mathcal{G}}$. Siten konjunktiomääritelmän nojalla s toteuttaa kaavan $E(x, y) \wedge E(y, z)$ mallissa $\mathcal{G}$.

Vastaavasti s' ei toteuta kaava $E(x, y)$, koska $(s'(x), s'(y)) = (c, e) \notin E^{\mathcal{G}}$, ja s' ei toteuta kaava $E(y, z)$, koska $(s'(y), s'(z)) = (e, e) \notin E^{\mathcal{G}}$. Ekvivalenssin määritelmän nojalla s' toteuttaa kaavan $E(x, y) \leftrightarrow E(y, z)$ mallissa $\mathcal{G}$.

Predikaattilogiikan semantiikan ehkä haastavin osa on kvanttoreiden totuusmäärittely. Intuitiivisesti kaava $\forall x_i A$ sanoo, että A on tosi, valittiinpa x_i:n arvo miten tahansa. Kaavan toteutuvuudessa ei siten voi rajoittua tarkastelemaan vain annetun tulkintafunktion x_i:lle antamaa arvoa, vaan pitää tutkia muita mahdollisia arvoja. Käytännössä tämä tehdään muuttamalla tulkintafunktiota muuttujan x_i kohdalta:

Määritelmä 3.9. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Tulkintafunktio $s(a/x_i)$ on $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jolla

$$s(a/x_i)(x_j) = \begin{cases} a & \text{jos } j = i, \\ s(x_j) & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Merkintä $s(a/x)$ tarkoittaa siten tulkintafunkiota, joka on muuten kuin s, mutta x:n arvoksi on asetettu a.

Esimerkki 3.10. Alla on esitetty tulkintafunktio s ja muutama s:stä arvoja muuttamalla saatu tulkintafunktio.

	x	y	z
s	1	4	3
$s(3/x)$	3	4	3
$s(5/y)$	1	5	3
$s(1/z)(1/y)$	1	1	1

Nyt voidaan määritellä kvanttoreiden merkitys:

Määritelmä 3.11. Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Olkoon $M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$.

1. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\forall x_i A$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos kaikilla $a \in M$ tulkintafunktio $s(a/x_i)$ toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$.

2. Tulkintafunktio s toteuttaa kaavan $\exists x_i A$ mallissa $\mathcal{M}$, jos ja vain jos on olemassa $a \in M$, jolla tulkintafunktio $s(a/x_i)$ toteuttaa kaavan A mallissa $\mathcal{M}$.

Esimerkki 3.12. Tarkastellan taas kuvan 3 verkkoa $\mathcal{G}$ ja seuraavaa tulkintafunktiota

	x	y
s	c	e

Nyt s ei toteuta kaavaa $E(x, y)$ verkossa $\mathcal{G}$, koska solmujen c ja e välillä ei ole särmää ($(s(x), s(y)) = (c, e) \notin E^{\mathcal{G}}$). Mutta tulkintafunktio $s(d/y)$ toteuttaa kaavan, koska $(s(d/y)(x), s(d/y)(y)) = (c, d) \in E^{\mathcal{G}}$. Siten s toteuttaa kaavan $\exists y E(x, y)$ mallissa $\mathcal{G}$.

Määritelmissä 3.4, 3.7 ja 3.11 on määritelty, milloin $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s toteuttaa predikaattilogiikan kaavan A mallissa $\mathcal{M}$. Tämä merkitään lyhyesti

$$\mathcal{M} \models_s A.$$

Jos s ei toteuta kaavaa A mallissa $\mathcal{M}$, tämä merkitään $\mathcal{M} \not\models_s A$. Kootaan vielä määritelmät yhteen. Predikaattilogiikan totuusmääritelmä tunnetaan *Tarskin totuusmääritelmänä.*

Määritelmä 3.13 (Tarskin totuusmääritelmä)**.** Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio. Olkoot $t_1, \ldots, t_n$ L-termejä, $P, R \in L$, missä P on yksipaikkainen ja R on n-paikkainen relaatiosymboli ($n > 1$).

1. $\mathcal{M} \models_s t_1 = t_2$, joss $t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$.
2. $\mathcal{M} \models_s P(t_1)$, joss $t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle \in P^{\mathcal{M}}$.
3. $\mathcal{M} \models_s R(t_1, \ldots, t_n)$, joss $(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \in R^{\mathcal{M}}$.
4. $\mathcal{M} \models_s \neg A$, joss $\mathcal{M} \not\models_s A$.
5. $\mathcal{M} \models_s (A \wedge B)$, joss ($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$).
6. $\mathcal{M} \models_s (A \vee B)$, joss ($\mathcal{M} \models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).
7. $\mathcal{M} \models_s (A \to B)$, joss ($\mathcal{M} \not\models_s A$ tai $\mathcal{M} \models_s B$).
8. $\mathcal{M} \models_s (A \leftrightarrow B)$, joss [($\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$) tai ($\mathcal{M} \not\models_s A$ ja $\mathcal{M} \not\models_s B$)].
9. $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$, joss $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$.
10. $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$, joss $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ jollakin $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$.

3.4 Validisuus ja loogiset seuraukset

Propositiologiikassa lauseet jaettiin tautologioihin, kontingensseihin ja ristiriitoihin. Tarkastellaan seuraavaksi, miten predikaattilogiikan kaavoja luokitellaan.

Tarskin totuusmääritelmä kertoo, milloin tulkintafunktio *toteuttaa* L-kaavan A L-mallissa $\mathcal{M}$ (merkitään $\mathcal{M} \models_s A$). Jos kaikki $\mathcal{M}$-tulkintafunktiot toteuttavat kaavan A mallissa $\mathcal{M}$ sanotaan, että kaava on *tosi* mallissa $\mathcal{M}$. Tätä merkitään $\mathcal{M} \models A$.

$$\mathcal{M} \models A \text{ jos ja vain jos } \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla } \mathcal{M}\text{-tulkintafunktioilla } s.$$

L-kaava A on *validi*, jos se on tosi kaikiss L-malleissa. Tämä merkitään $\models A$.

$$\models A \text{ jos ja vain jos } \mathcal{M} \models A \text{ kaikilla } L\text{-malleilla } \mathcal{M}.$$

Tämän yleisempää 'aina toden' käsitettä ei voida määritellä. Jos A on L-kaava, tarvitaan L-malli, jotta A:n toteutumista ylipäänsä voidaan tarkastella (jotta A:n symboleilla olisi merkitys). Siispä predikaattilogiikan 'aina tosi' on 'tosi kaikissa tarkasteltavan aakkoston malleissa'.

Validien kaavojen erityistapaus ovat tautologiat. Nämä ovat predikaattilogiikan kaavoja, jotka on muodostettu sijoittamalla propositiologiikan tautologioihin predikaattilogiikan kaavoja propositiosymboleiden tilalle. Esimerkkejä tautologioista ovat

- $(R(x, y) \vee \neg R(x, y))$,
- $(P(x) \wedge (R(x, y) \vee R(y, z))) \leftrightarrow ((P(x) \wedge R(x, y)) \vee (P(x) \wedge R(y, z)))$,

- $(P_0(x) \to P_1(x)) \to (\neg P_1(x) \to \neg P_0(x))$.

Tautologiat ovat aina valideja, mutta päinvastainen ei päde. Seuraavat ovat esimerkkejä valideista kaavoista, jotka eivät ole tautologioita:

- $x = x$
- $x = y \to y = x$
- $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$
- $R(x, y) \to \exists z R(x, z)$

Voidaan myös määritellä, milloin kaava on 'joskus tosi', eli toteutuva. L-kaava A on *toteutuva*, jos on olemassa jokin L-malli $\mathcal{M}$ ja jokin $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s, jotka toteuttavat kaavan, eli $\mathcal{M} \models_s A$ jollakin $\mathcal{M}$ ja s. A on *ristiriita*, jos se ei ole toteutuva, eli $\mathcal{M} \not\models_s A$ kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s. L-kaava A on *kumoutuva*, jos se ei ole validi, eli jos $\mathcal{M} \not\models_s A$ jollakin L-mallilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktiolla s. Jos kaava on sekä toteutuva että kumoutuva, se on *kontingentti*.

Esimerkki 3.14. Olkoon $L = \{R\}$.

- Kaava $\forall x \forall y (R(x, y) \vee \neg R(x, y))$ on validi (muttei tautologia - miksei?).
- Kaava $\forall x \forall y (R(x, y) \vee R(y, x))$ on kontingentti. Jos valitaan $M = \{0, 1\}$ ja $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$, niin kaava on epätosi mallissa (M, R_1) mutta tosi mallissa (M, R_2).
- Kaava $x = y$ on kontingentti. Edellisestä kaavasta poiketen kaava voi olla tosi tai epätosi samassa mallissa (kunhan universumissa on vähintään kaksi alkiota) riippuen tulkintafunktiosta.
- Kaava $\forall x \forall y R(x, y) \wedge \exists x \neg R(x, x)$ on ristiriita. Jos $\mathcal{M}$ on malli, joka toteuttaa kaavan $\forall x \forall y R(x, y)$, niin kaikki parit (a, b), joissa a ja b ovat $\mathcal{M}$:n universumin alkioita, ovat relaatiossa $R^{\mathcal{M}}$. Mutta tällöin myös $(a, a) \in R^{\mathcal{M}}$ kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, joten $\mathcal{M}$ ei voi toteuttaa kaavaa $\exists x \neg R(x, x)$.

Predikaattilogiikassa kaavojen kolmijako on siis jako *valideihin*, *ristiriitaisiin* ja *kontingentteihin* kaavoihin. Validit ja kontingentit ovat *toteutuvia*, ristiriidat ja kontingentit puolestaan *kumoutuvia*.

Jos A ja B ovat saman aakkoston kaavoja, sanotaan B:n olevan A:n *looginen seuraus* ($A \Rightarrow B$), jos kaikki L-mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktiot s, jotka toteuttavat A:n, toteuttavat myös B:n. Yhtäpitävästi B on A:n looginen seuraus, jos kaava $A \to B$ on validi.

Jos A ja B ovat saman aakkoston kaavoja, sanotaan niiden olevan *(loogisesti) ekvivalentit* ($A \Leftrightarrow B$), jos ne ovat toistensa loogisia seurauksia, ts. ne toteutuvat samoilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla. Yhtäpitävästi voidaan sanoa, että A ja B ovat loogisesti ekvivalentit, jos kaava $A \leftrightarrow B$ on validi. Esimerkkejä loogisista ekvivalensseista ovat:

- $\neg\forall x A \Leftrightarrow \exists x \neg A$
- $\neg\exists x A \Leftrightarrow \forall x \neg A$
- $\forall x(A \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A \wedge \forall x B$

4 Vapaat ja sidotut muuttujat

Tarkastellaan muuttujan 'x' roolia kaavoissa $R(x,y)$ ja $\exists x R(x,y)$. Jos $\mathcal{M}$ on $\{R\}$-malli ja s on $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, niin kaavan $R(x,y)$ toteutuminen mallissa $\mathcal{M}$ tulkintafunktiolla s riippuu s:n x:lle antamasta arvosta, kun taas kaavan $\exists x R(x,y)$ toteutuminen ei riipu tästä. Tämä johtuu siitä, että x on *vapaa* kaavassa $R(x,y)$, mutta *sidottu* kaavassa $\exists x R(x,y)$, jossa kvanttori $\exists x$ sitoo sen. Määritellään käsitteet täsmällisesti:

Määritelmä 4.1. Kvanttorin *vaikutusalue* kaavassa A on se kaavan A alikaava, jossa kvanttori esiintyy pääoperaattorina, eli se kaava, johon kvanttori on lisätty kaavan A konstruktiossa määritelmän 2.4 mukaan.

Esimerkki 4.2. Allaolevissa kaavoissa on alleviivattu kvanttorin $\forall x$ vaikutusalue:

$$\underline{\forall x(R_0(x,y) \to R_1(z,x))}$$
$$\underline{\forall x R_0(x,y)} \to R_1(z,x)$$

Määritelmä 4.3. Muuttujan x_i esiintymä on *sidottu*, jos se esiintyy kvanttorin $\forall x_i$ tai $\exists x_i$ vaikutusalueella. Muuttujaesiintymä on *vapaa*, jos se ei ole sidottu. Kvanttori $\forall x_i$ tai $\exists x_i$ *sitoo* kaikki vaikutusalueellaan olevat muuttujan x_i esiintymät, jotka olivat vapaita ennen kvanttorin lisäämistä.

Esimerkki 4.4.

- Kaavassa $R(x,y)$ kaikki muuttujaesiintymät ovat vapaita.
- Kaavassa $\exists x R(x,y)$ muuttuja x on sidottu ja y vapaa.
- Kaavassa $\forall y(R(x,y) \to \exists x R(x,y))$ on x:n ensimmäinen esiintymä vapaa, muut sidottuja; y on sidottu.
- Kaavassa $\forall x \forall y(R(x,y) \to \exists x R(x,y))$ ensimmäinen kvanttori $\forall x$ sitoo x:n *vapaan* (eli ensimmäisen) esiintymän kaavassa $\forall y(R(x,y) \to \exists x R(x,y))$. Jälkimmäsisiin esiintymiin kvanttori ei vaikuta, koska ne ovat jo sidottuja.

Muuttuja on vapaa kaavassa A, jos sen jokin esiintymä on vapaa. Vastaavasti muuttuja on sidottu, jos sen jokin esiintymä on sidottu. Siten muuttuja voi olla sekä vapaa että sidottu kaavassa. Muuttuja*esiintymät* sen sijaan ovat aina joko sidottuja tai vapaita, mutteivät molempia.

Määritelmä 4.5. Kaavaa, jossa ei ole vapaita muuttujia, sanotaan myös *lauseeksi*.

Esimerkki 4.6. Seuraavat kaavat ovat lauseita:

$$P(c_1)$$
$$R(c_0,c_1) \to c_0 = c_1$$
$$\forall x R(x,x)$$

Kun tarkastellaan kaavan toteutumista mallissa annetulla tulkintafunktiolla, vain vapaiden muuttujien arvoilla on merkitystä:

Lause 4.7. *Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja A L-kaava. Jos s ja s' ovat kaksi $\mathcal{M}$-tulkintafunktiota, jotka antavat samat arvot kaikille A:n vapaille muuttujille, niin $\mathcal{M} \models_S A$, jos ja vain jos $\mathcal{M} \models_{s'} A$.*

Todistus. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi. □

Ylläolevan ilmiön erikoistapauksena nähdään, että lauseiden toteutuminen mallissa on riippumatonta valitusta tulkintafunktiosta. Siten lauseet eivät niinkään 'puhu' tulkintafunktion arvoina olevista alkioista, vaan ilmaisevat koko mallin ominaisuuksia, kuten 'malli on verkko, jossa on kolmisykli'.

Aiemmin määriteltiin, milloin kaava A on tosi mallissa $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{M} \models A \text{ jos ja vain jos } \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla } \mathcal{M}\text{-tulkintafunkioilla } s.$$

Jos A on lause, $\mathcal{M} \models A$ on yhtäpitävää ehdon

$$\mathcal{M} \models_s A \textit{ jollakin } \mathcal{M}\text{-tulkintafunkioilla } s$$

kanssa.

Kun A on tosi mallissa $\mathcal{M}$, sanotaan myös, että $\mathcal{M}$ on *A:n malli.*

5 Määriteltävyys

Logiikan keskeisiä käsitteitä on määriteltävyys. Määriteltävyys ilmaisee, mitä ominaisuuksia, alkioita ja rakenteita annetun logiikan kaavoilla voidaan tavoittaa. Voidaan sanoa, että kaavojen koko idea on se, että niillä voidaan määritellä joukkoja, relaatioita, jne.

Määritelmä 5.1. Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ L-malli. Joukko $Q \subseteq M$ on *mallin $\mathcal{M}$ määriteltävä osajoukko*, jos on olemassa L-kaava A, jossa esiintyy vapaana vain muuttuja x ja jolla

$$Q = \{a \in M : \mathcal{M} \models_s A \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \text{ joilla } s(x) = a\}.$$

Tällöin *A määrittelee joukon Q mallissa $\mathcal{M}$.* Huomaa, että Lauseen 4.7 nojalla, yhtäpitävää on vaatia:

$$Q = \{a \in M : \mathcal{M} \models_s A \text{ jollakin tulkintafunktioilla } s, \text{ jolla } s(x) = a\}.$$

Jos S on n-paikkainen relaatio, sanotaan, että S on *määriteltävä relaatio mallissa* $\mathcal{M}$, jos on olemassa L-kaava B, jossa vapaina esiintyvät muuttujat $x_0, \ldots, x_{n-1}$ ja jolla

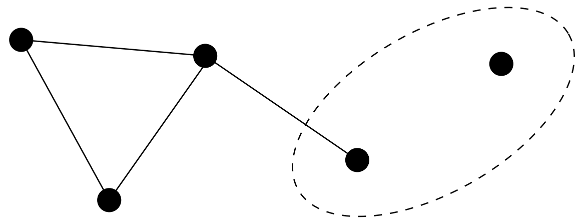
$$S = \{(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in M^n : \mathcal{M} \models_s B \text{ kaikilla tulkintafunktioilla } s, \\ \text{joilla } s(x_i) = a_i \text{ kaikilla } i < n\}.$$

Tällöin *B määrittelee relaation S mallissa $\mathcal{M}$.*

Esimerkki 5.2. Tarkastellaan verkkojen aakkostoa $L = \{E\}$ ja kuvan 4 verkkoa $\mathcal{G}$. Olkoon A kaava

$$\forall y \forall z((E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z).$$

A:n ainoa vapaa muuttuja on x, joten A määrittelee G:n osajoukon. Kaava ilmaisee ominaisuuden 'x:llä on korkeintaan yksi naapuri', joten sen määrittelemä osajoukko on kuvassa merkitty katkoviivalla.



Kuva 4: Kaavan A määrittelemä joukko verkossa $\mathcal{G}$

Tarkastellaan tilannetta hieman tarkemmin. Olkoon a jokin verkon solmu ja s tulkintafunktio, jolla $s(x) = a$. Jos a on solmu, jolla on kaksi (tai useampi) naapuria, niin on olemassa solmut b ja c, joilla $(a,b) \in E^{\mathcal{G}}$ ja $(a,c) \in E^{\mathcal{G}}$. Tällöin

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} E(x,y) \text{ ja } \mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} E(x,z) \text{ mutta } \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z,$$

eli $\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} E(x,y) \wedge E(x,z)$ mutta $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} y = z$, jolloin $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z$. Siten $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)} \forall z(E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z$ ja edelleen $\mathcal{G} \not\models_{s} \forall y \forall z(E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z$.

Jos sen sijaan a on solmu, jolla on korkeintaan yksi naapuri ja b ja c ovat mielivaltaisia verkon solmuja, niin on kaksi vaihtoehtoa: joko toinen solmuista b ja c ei ole a:n naapuri tai sitten b ja c ovat sama solmu (koska a:lla on korkeintaan yksi naapuri). Ensimmäisessä tapauksessa joko

$$\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} E(x,y) \text{ tai } \mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} E(x,z),$$

jolloin $\mathcal{G} \not\models_{s(b/y)(c/z)} (E(x,y) \wedge E(x,z))$. Jälkimmäisessä tapauksessa

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} y = z.$$

Molemmissa tapauksissa pätee

$$\mathcal{G} \models_{s(b/y)(c/z)} ((E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z.$$

Koska b ja c olivat mielivaltaisia, saadaan

$$\mathcal{G} \models_{s} \forall y \forall z((E(x,y) \wedge E(x,z)) \to y = z).$$

Siis tulkintafunktio s toteuttaa kaavan A, jos ja vain jos $s(x)$ on solmu, jolla on korkeintaan yksi naapuri. Siten A määrittele verkossa $\mathcal{G}$ niiden solmujen osajoukon, joilla on korkeintaan yksi naapuri.

Annetussa mallissa määriteltävien osajoukkojen kokoelma on suljettu äärellisten yhdisteiden, äärellisten leikkausten ja komplementoinnin suhteen, eli jos Q ja Q' ovat määriteltäviä mallissa $\mathcal{M}$, myös joukot $Q \cup Q'$, $Q \cap Q'$ ja $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) \setminus Q$ ovat. (Tilanteet vastaavat konnektiiveja $\vee$, $\wedge$ ja $\neg$.) Kokoelma muodostaa siten Boolen algebran. Sama pätee määriteltävien n-paikkaisten relaatioiden kokoelmalle.

Jos S on kaksipaikkainen relaatio joukossa M, niin S:n *ensimmäinen projektio* on niiden alkioiden a joukko, joilla $(a, b) \in S$ pätee jollakin b. Vastaavasti S:n *toinen projektio* määritellään niiden alkioiden b joukkona, joilla $(a, b) \in S$ jollakin a. Määriteltävän relaation projektiot ovat myös määriteltäviä (vastaavat eksistenssikvantifiointia).

Esimerkki 5.3. Tarkastellaan mallia $(\{1, 2, 3, 4\}, <)$, missä $<$ on joukon tavanomainen järjestys. Kaava $x < y \vee x = y$ määrittelee tässä mallissa relaation

$$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$$

eli relaation $\leq$.

Esimerkki 5.4. Tarkastellaan joukon $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ relaatiota

$$S = \{(2,2), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3), (4,4), (5,2), (5,3)\}.$$

Oletetaan, että $\mathcal{M}$ on malli, jossa S on määriteltävä jollakin kaavalla A. Tällöin relaation ensimmäinen projektio on joukko $\{2, 3, 4, 5\}$, ja sen määrittelee kaava $\exists y A(x, y)$. Relaation toinen projektio on joukko $\{1, 2, 3, 4\}$ ja sen määrittelee kaava $\exists x A(x, y)$

6 Sijoitus

Jos A on kaava, jossa x esiintyy vapaana, voidaan ajatella, että A ilmaisee jonkin x:n ominaisuuden. (Tarkalleen ottaen A ilmaisee ominaisuuden, joka on tai ei ole sillä alkiolla, jonka tulkintafunktio s antaa x:n arvoksi, ja tämä ilmenee siinä, toteuttaako s A:n vai ei.) Jos halutaan kaava, joka ilmaisee, että jollakin muulla termillä t on sama ominaisuus, tämä saadaan *sijoittamalla* termi t x:n vapaisiin esiintymiin kaavassa A.

Esimerkiksi, kaava $\exists z x < z$ ilmaisee, että on olemassa x:ää suurempi alkio. Kun halutaan ilmaista, että on olemassa y:tä suurempi alkio vaihdetaan vain kaavassa x:n tilalle y: $\exists z y < z$.

Ongelmia tulee, jos halutaan sanoa, että on olemassa z:aa suurempi alkio. Jos vain sijoitetaan z x:n tilalle, saadaan kaava $\exists z z < z$, mutta tämä ilmaisee aivan eri ominaisuuden: on olemassa alkio, joka on itseään suurempi. Siten sijoitus ei ole aivan niin triviaalia, kuin miltä se ensin voisi vaikuttaa. Ongelmaan on kuitenkin varsin yksinkertainen ratkaisu. Koska sidottujen muuttujien tulkinta ei vaikuta kaavan toteutumiseen, voidaan yksinkertaisesti vaihtaa sidotut muuttujat, jolloin saadaan ekvivalentti kaava. Esimerkiksi kaavat

$$\exists z x < z \quad \text{ja} \quad \exists y x < y$$

ovat loogisesti ekvivalentit, ja jälkimmäiseen voidaan x:n tilalle sijoittaa z, niin että kaava ilmaisee halutun ominaisuuden 'on olemassa z:aa suurempi alkio'.

Kun vaihdetaan sidottuja muuttujia, on oltava tarkkana, ettei vahingossa sidota uusia muuttujia. Esimerkiksi kaavat

$$\exists z x < z \quad \text{ja} \quad \exists x x < x$$

eivät ole loogisesti ekvivalentit. Käytännössä sidottujen muuttujien vaihtamisessa on olemassa yksinkertainen ratkaisu. Koska kaavassa esiintyy vain äärellisen monta muuttujaa, voidaan aina uudeksi sidotuksi muuttujaksi valita sellainen, joka ei esiinny kaavassa lainkaan ja joka ei ole se muuttuja, joka kaavaan halutaan sijoittaa. Näin saadaan kaavalle ekvivalentti muoto, johon sijoitus voidaan tehdä. 'Voidaan tehdä' määritellään alla tarkasti käsitteellä '*vapaa muuttujalle*'.

Määritelmä 6.1. L-termi t on *vapaa muuttujalle x kaavassa A*, jos t ei sisällä yhtään muuttujaa, joka tulisi sidotuksi, kun t sijoitetaan x:n vapaisiin esiintymiin kaavassa A.

Käytännössä (kurssin tässä vaiheessa) t on vapaa muuttujalle x kaavassa A, jos t ei *ole* muuttuja, joka tulisi sidotuksi, kun se sijoitetaan x:n vapaisiin esiintymiin.

Esimerkki 6.2.

- y ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y R(x,y)$ koska y:n sijoittaminen x:n vapaaseen esiintymään antaisi kaavan $\forall y R(y,y)$, jossa x:n vapaa esiintymä on muuttunut y:n sidotuksi esiintymäksi.
- z on vapaa muuttujalle x samassa kaavassa, koska sijoituksen tuloksessa $\forall y R(z,y)$ x:n vapaa esiintymä on muuttunut z:n vapaaksi esiintymäksi.

Määritelmä 6.3. Olkoon L aakkosto, A L-kaava ja t L-termi. Notaatio

$$A(t/x)$$

tarkoittaa kaavaa, joka saadaan, kun x:n vapaisiin esiintymiin sijoitetaan termi t.

Merkintä on määritelty vain, kun sijoitus on sallittu, eli kun t on vapaa muuttujalle x kaavassa A.

Huomaa, että sijoituksessa kaavan merkitys muuttuu. Jos x ja y ovat eri muuttujia, niin pääsääntöisesti A ja $A(y/x)$ eivät ole loogisesti ekvivalentit. On helppoa konstruoida malli ja tulkintafunktio, jossa kaavoista toinen toteutuu, mutta toinen ei.

Huomaa myös, että notaatiota $A(t/x)$ käytetään vain, jos sijoitus on sallittu alkuperäiseen kaavaan A. Jos sijoitus ei ole sallittu, voidaan A vaihtaa ekvivalenttiin kaavaan (sidotun muuttujan vaihtaminen), mutta näin saatavaa kaavaa ei merkitä $A(t/x)$:llä (koska kaava, johon sijoitettiin, ei ollut A).

Esimerkki 6.4.

- z on vapaa muuttujalle y kaavassa $A = R(x,y) \wedge \forall x R(x,y)$ ja $A(z/y) = R(x,z) \wedge \forall x R(x,z)$.
- z on myös vapaa muuttujalle x kaavassa A ja $A(z/x) = R(z,y) \wedge \forall x R(x,y)$.

- z ei ole vapaa muuttujalle x kaavassa $B = \exists z R(x,z) \wedge \forall y R(x,y)$ koska sijoitus antaisi $\exists z R(z,z) \wedge \forall y R(z,y)$, missä x:n vapaa esiintymä on muuttunut z:n sidotuksi esiintymäksi. Siten $B(z/x)$ ei ole määritelty.
- Vakiot ovat vapaita kaikille muuttujille kaikissa kaavoissa, koska ne eivät sisällä muuttujia, jotka voisivat tulla sidotuiksi.

Lause 6.5 (Sijoituslemma). *Olkoon L aakkosto, A L-kaava ja t L-termi. Jos t on vapaa muuttujalle x kaavassa A, niin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s:*

1. $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$
2. $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$*, missä* $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle$.

Todistus. Todistus jätetään harjoitustehtäväksi (indutkio kaavan rakenteen suhteen). □

Sijoituslemman avulla voidaan osoittaa, että

$$\forall x A \Rightarrow A(t/x).$$

Olkoon nimittäin $\mathcal{M}$ malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jolla $\mathcal{M} \models_s \forall x A$. Olkoon nyt $a = t^{\mathcal{M}}\langle s \rangle \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Tällöin oletuksen nojall $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} A$ ja sijoituslemman nojalla $\mathcal{M} \models_s A(t/x)$.

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$A(t/x) \Rightarrow \exists x A.$$

7 Luonnollinen päättely

Tarakstellaan seuraavaksi päättelyä predikaattilogiikassa. Konnektiivien osalta käytetään samoja tuonti- ja eliminointisääntöjä kuin propositiologiikassa. Koska predikaattilogiikassa esiintyy myös kvanttoreita, tarvitaan niille omat tuonti- ja elminointisäännöt. Näihin sääntöihin liittyy mahdollisuus tehdä sijoituksia kaavoihin.

7.1 Universaalikvanttorin säännöt

Universaalikvanttorin eliminointisääntö on

$$\frac{\forall x A}{A(t/x)} \ \forall \text{ E}$$

missä t on termi. Huomaa, että termin t on oltava vapaa muuttujalle x kaavassa A, muuten kaava $A(t/x)$ ei ole määritelty. Muilta osin t voi olla mikä tahansa termi. Sääntö antaa ehyen päättelyaskeleen, sillä kaava $\forall x A \to A(t/x)$ on validi.

Universaalikvanttorin tuontisäännössä on lisäehto:

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ A\end{matrix}}{\forall xA}\ \forall\,\mathrm{T}$$

Ehto: x ei esiinny vapaana missään A:n päättelyn (hylkäämättömässä) oletuksessa.

Ehto tarvitaan, jotta päättelyaskel antaisi ehyen päättelyn. Sellaisenaan askel on siis ehyt vain, jos x ei esiinny vapaana A:ssa. Kuitenkin sääntöä sovelletaan useimmiten ninomaan tilanteisiin, joissa x esiintyy A:ssa vapaana. Tällöin on oleellista varmistaa, ettei x:stä ole tehty oletuksia päättelyn aikaisemmissa vaiheissa. Intuitiivinen idea on, että A ilmaisee jonkin ominaisuuden, joka 'x'llä on. Siitä, että jollakin alkiolla on tämä ominaisuus, ei voida päätellä, että kaikilla alkioilla olisi kyseinen ominaisuus. Mutta jos x ei esiinny vapaana päättelyn missään oletuksessa, siitä ei ole oletettu mitään, ja x voi tarkoittaa mitä tahansa alkiota, jolloin ominaisuus pätee kaikilla x. Tämä vastaa samaa ideaa, jota käytetään, kun jossakin todistukessa valitaan 'mielivaltainen alkio a'. Tarkempi perustelu säännölle käsitellään päättelyn eheyslauseen yhteydessä.

Esimerkki 7.1. Seuraavassa on yksinkertainen esimerkki universaalikvanttorin eliminointi- ja tuontisääntöjen käytöstä:

$$\cfrac{\cfrac{\forall xP(x)}{P(y)}\ \forall\,\mathrm{E}}{\forall yP(y)}\ \forall\,\mathrm{T}$$

Ensimmäisessä päättelyaskeleessa on sijoitettu y muuttujan x paikalle: y on vapaa muuttujalle x kaavassa $P(x)$ ja $P(x)(y/x) = P(y)$. Seuraavassa askeleessa huomataan, että y ei esiinny vapaana päättelyn oletuksessa $\forall xP(x)$, joten kvanttori $\forall y$ voidaan tuoda.

7.2 Eksistenssikvanttorin säännöt

Eksistenssikvanttorin tuontisääntö on:

$$\cfrac{A(t/x)}{\exists xA}\ \exists\,\mathrm{T}$$

Ainoa vaatimus on, että t:n on oltava vapaa muuttujalle x kaavassa A, muilta osin t voi olla mikä tahansa termi. Sääntö on ehyt, koska $A(t/x) \to \exists xA$ on validi.

Esimerkki 7.2. Eksistenssikvanttorin eliminointisäännössä kannattaa huomata, että sääntöä sovellettaessa ei tehdä sijoitusta aiemmin pääteltyyn kaavaan, vaan *puretaan sijoitus* samalla kun lisätään kvanttori. Siten päättely

$$\cfrac{R(x,x)}{\exists yR(x,y)}\ \exists\,\mathrm{T}$$

ei sisällä osittaista sijoitusta (jollaista ei ole olemassakaan), vaikka se siltä saattaisi näyttää, vaan $R(x,x)$ on kaava, johon sijoitus on tehty, nimittäin kaavaan $R(x,y)$ on y:n esiintymään sijoitettu x. Huomaa, että x on vapaa muuttujalle y kaavassa $R(x,y)$, ja $R(x,y)(x/y) = R(x,x)$.

Eksistenssikvanttorin eliminointisääntö sisältää taas lisäehdon:

$$\dfrac{\exists x_i A \qquad \begin{array}{c}[A]\\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\ \exists\ \mathrm{E}$$

Ehto: x ei esiinny vapaana kaavassa B tai missään B:n päättelyn (hylkäämättömässä) oletuksessa, paitsi kaavassa A.

Päättelyn epämuodollinen perustelu menee näin: Tiedetään, että $\exists xA$ on totta, eli että A pätee jollakin x:n arvolla. Oletetaan hetkeksi, että se pätee alkuperäisellä x:n arvolla (tilapäinen oletus A). Tästä päätellään jotakin yleispätevää. Kunhan johtopäätös ei mainitse x:ää, ei ole väliä, mikä alkio oikeasti toteuttaa A:n, johtopäätös on joka tapauksessa tosi, koska *jokin* alkio toteuttaa A:n. Siispä voidaan tehdä johtopäätös B ja hylätä tilapäinen oletus A. Formaali perustelu sisältyy taas eheyslauseen todistukseen.

Esimerkki 7.3. Päätellään $\exists xA$ kaavasta $\neg\forall x\neg A$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]^1}{\exists xA}\ \exists\ \mathrm{T,\ h1} \qquad [\neg\exists xA]^2}{\exists xA \wedge \neg\exists xA}\ \wedge\ \mathrm{T}}{\neg A}\ \neg\ \mathrm{T,\ 1}}{\forall x\neg A}\ \forall\ \mathrm{T,\ h2} \qquad \neg\forall x\neg A}{\forall x\neg A \wedge \neg\forall x\neg A}\ \wedge\ \mathrm{T}}{\neg\neg\exists xA}\ \neg\ \mathrm{T,\ 2}}{\exists xA}\ \neg\ \mathrm{E}$$

Huomautukset:

h1 x on vapaa muuttujalle x kaavassa A ja $A(x/x) = A$.

h2 x ei esiinny vapaana missään hylkäämättömässä oletuksessa, koska tilapäinen oletus A on jo hylätty ja kaavassa $\neg\exists xA$ x on sidottu.

Esimerkki 7.4. Päätellään $\neg\forall x\neg A$ kaavasta $\exists A$:

$$\dfrac{\exists xA \qquad \dfrac{\dfrac{[A]^2 \qquad \dfrac{[\forall x\neg A]^1}{\neg A}\ \forall\ \mathrm{E,\ h1}}{A \wedge \neg A}\ \wedge\ \mathrm{T}}{\neg\forall x\neg A}\ \neg\ \mathrm{T,\ 1}}{\neg\forall x\neg A}\ \exists\ \mathrm{E,\ 2,\ h2}$$

Huomautukset:

h1 x on vapaa muuttujalle x kaavassa $\neg A$ ja $\neg A(x/x) = \neg A$.

h2 x ei esiinny vapaana johtopäätöksessä $\neg\forall x\neg A$ ja ainoa hylkäämätön oletus, joka tässä vaiheessa on jäljellä, on A, jossa x sai esiintyä vapaana.

7.3 Määritelmä ja yhteenveto

Annetaan vielä päättelylle formaali määritelmä, jotta voidaan todistaa sille eheyslause.

Määritelmä 7.5. Predikaattilogiikan päättelyiden $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ joukko määritellään seuraavasti:

1. Triviaali päättely A (missä A on predikaattilogiikan kaava) on päättely. Tässä tapauksessa $\mathcal{P} = \emptyset$ ja A on sekä oletus että johtopäätös.

2. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ B\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$ on päättely.

3. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{A}$ ja $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \wedge B\end{array}}{B}$ ovat päättelyitä.

4. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{A \vee B}$ ja $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{B \vee A}$ ovat päättelyitä.

5. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \vee B\end{array}$, $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ C\end{array}$ ja $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{R}\\ C\end{array}$ ovat päättelyitä, niin

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q} & \mathcal{R}\\ A \vee B & C & C\end{array}}{C}$$

   on päättely.

6. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}}{A \to B}$ on päättely.

7. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \to B\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A \to B & A\end{array}}{B}$ on päättely.

8. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B\end{array}$ ja $\begin{array}{c}B\\ \mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ovat päättelyitä, niin $\dfrac{\begin{array}{cc}[A] & [B]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ B & A\end{array}}{A \leftrightarrow B}$ on päättely.

9. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A \leftrightarrow B\end{array}$, $\begin{array}{c}\mathcal{Q}\\ A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}\mathcal{R}\\ B\end{array}$ ovat päättelyitä, niin

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ A \leftrightarrow B & A\end{array}}{B} \text{ ja } \dfrac{\begin{array}{cc}\mathcal{P} & \mathcal{R}\\ A \leftrightarrow B & B\end{array}}{A}$$

ovat päättelyitä.

10. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \neg\neg A\end{array}}{A}$ on päättly.

11. Jos $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}$ on päättely, niin $\dfrac{\begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{P}\\ B \wedge \neg B\end{array}}{\neg A}$ on päättely.

12. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ on päättely ja x_i ei esiinny vapaana missään päättelyn $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}$ hylkäämässä oletuksessa, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A\end{array}}{\forall x_i A}$ on päättely.

13. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{array}$ on päättely ja t on termi, joka on vapaa muuttujalle x_i kaavassa A, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{array}}{A(t/x_i)}$ on päättely.

14. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{array}$ on päättely ja t on termi, joka on vapaa muuttujalle x_i kaavassa A, niin $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{array}}{\exists x_i A}$ on päättely.

15. Jos $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ ovat päättelyitä ja x_i ei esiinny vapaana kaavassa B tai missään päättelyn $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ hylkäämättömässä oletuksessa, paitsi mahdollisesti A:ssa, niin

$$\dfrac{\begin{array}{cc} & [A]\\ \mathcal{P} & \mathcal{Q}\\ \exists x_i A & B\end{array}}{B}$$

on päättely.

Jos $\mathcal{S}$ on joukko predikaattilogiikan kaavoja ja A on predikaattilogiikan kaava, niin merkintä

$$\mathcal{S} \vdash A$$

tarkoittaa, että on olemassa luonnollinen päättely, jonka oletukset ovat joukossa $\mathcal{S}$ ja jonka johtopäätös on A.

Predikaattilogiikan päättelysäännöt on koottu taulukkoon 1.

	Tuonti	Eliminointi
Konjunktio	$\dfrac{A \quad B}{A \wedge B} \wedge \mathrm{T}$	$\dfrac{A \wedge B}{A} \wedge \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \wedge B}{B} \wedge \mathrm{E}$
Disjunktio	$\dfrac{A}{A \vee B} \vee \mathrm{T} \qquad \dfrac{B}{A \vee B} \vee \mathrm{T}$	$\dfrac{A \vee B \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C} \vee \mathrm{E}$
Implikaatio	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B} \to \mathrm{T}$	$\dfrac{A \to B \quad A}{B} \to \mathrm{E}$
Ekvivalenssi	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ A\end{matrix}}{A \leftrightarrow B} \leftrightarrow \mathrm{T}$	$\dfrac{A \leftrightarrow B \quad A}{B} \leftrightarrow \mathrm{E} \qquad \dfrac{A \leftrightarrow B \quad B}{A} \leftrightarrow \mathrm{E}$
Negaatio	$\dfrac{\begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B \wedge \neg B\end{matrix}}{\neg A} \neg \mathrm{T}$	$\dfrac{\neg\neg A}{A} \neg \mathrm{E}$
Universaalikvanttori	$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ A\end{matrix}}{\forall x_i A} \forall \mathrm{T}$ x_i ei saa esiintyä vapaana missään A:n päättelyn oletuksessa	$\dfrac{\forall x_i A}{A(t/x_i)} \forall \mathrm{E}$ t:n oltava vapaa muuttujalle x_i kaavassa A
Eksistenssikvanttori	$\dfrac{A(t/x_i)}{\exists x_i A} \exists \mathrm{T}$ t:n oltava vapaa muuttujalle x_i kaavassa A	$\dfrac{\exists x_i A \quad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{B} \exists \mathrm{E}$ x_i ei saa esiintyä vapaana kaavassa B tai missään kaavan B päättelyn oletuksessa, paitsi kaavassa A

Taulukko 1: Predikattilogiikan päättelysäännöt

7.4 Päättelyn eheys

Luonnollinen päättely on ehyt ja täydellinen päättelyjärjestelmä myös predikaattilogiikalle. Todistetaan seuraavaksi eheys. Täydellisyyslauseen todistusta ei käsitellä tällä kurssilla, mutta esimerkiksi kurssilla *Matemaattinen logiikka.*

Laajennetaan ensin loogisen seurauksen käsitettä:

Määritelmä 7.6. Olkoon L aakkosto, $\mathcal{S}$ joukko L-kaavoja ja A L-kaava. A on joukon $\mathcal{S}$ *looginen seuraus*, $\mathcal{S} \Rightarrow A$, jos kaikilla L-malleilla $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s pätee

$$\text{jos } \mathcal{M} \models_s B \text{ kaikilla } B \in \mathcal{S}, \text{ niin } \mathcal{M} \models_s A.$$

Jos on yksiö $\mathcal{S} = \{B\}$, kirjoitetaan $\{B\} \Rightarrow A$ lyhyemmin $B \Rightarrow A$ (näin määritelmä yhtyy aiempaan määritelmään).

Lause 7.7 (Eheyslause)**.** *Olkoon L aakkosto. Jos $\mathcal{S}$ on joukko L-kavoja, A on L-kaava ja $\mathcal{S} \vdash A$, niin A on joukon $\mathcal{S}$ looginen seuraus.*

Todistus. Lause todistetaan induktiolla luonnollisen päättelyn rakenteen suhteen. Tarkemmin ilmaistuna, todistetaan, että jos $\mathcal{M}$ on L-malli ja s on $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat päättelyn $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ oletukset, niin ne toteuttavat myös A:n.

1. Jos $\mathcal{P}$ on triviaali päättely A, niin A on sekä oletus että johtopäätös. Siis jokaisella mallilla ja tulkintafunktiolla, jotka toteuttavat päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset, pätee $\mathcal{M} \models_s A$.

2. Oletetaan (induktio-oletus), että päättelyt $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ ja $\begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}$ ovat ehyitä. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{Q}\\ B\end{matrix}}{A \wedge B}$. Olkoon sitten $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset. Koska $\mathcal{P}$:n ja $\mathcal{Q}$:n oletukset ovat päättelyn $\mathcal{R}$ oletuksia, pätee induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s A$ ja $\mathcal{M} \models_s B$. Tällöin Tarskin totuusmääritelmän nojalla $\mathcal{M} \models_s A \wedge B$, joten $A \wedge B$ on päättelyn $\mathcal{R}$ oletusten looginen seuraus.

3.-11. Muut konnektiivisäännöt jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. Todistusten idea on pitkälti sama kuin vastaavissa todistuksissa propositiologiikassa (tosin totuuden käsite on eri).

12. Olkoon $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ sellainen päättely, että muuttuja x_i ei esiinny vapaana missään $\mathcal{P}$:n oletuksessa. Oletetaan lisäksi (induktio-oletus), että $\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}$ on ehyt. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ A\end{matrix}}{\forall x_i A}$. Olkoon $\mathcal{M}$ L-kaava ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat kaikki päättelyn $\mathcal{R}$ (ja siten myös päättelyn $\mathcal{P}$) oletukset. Olkoon $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ mielivaltainen. Koska x_i ei esiinny vapaana $\mathcal{P}$:n oletuksissa, Lauseen 4.7 nojalla, myös tulkintafunktio $s(a/x_i)$ toteuttaa $\mathcal{P}$:n oletukset.

Induktio-oletuksen nojalla tällöin $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$ ja siten Tarskin totuusmääritelmän nojalla $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$ (koska a oli mielivaltainen).

13. Oletetaan sitten induktio-oletuksena, että $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{array}$ on ehyt päättely. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \forall x_i A\end{array}}{A(t/x_i)}$, missä t on vapaa muuttujalle x_i kaavassa A. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset, ja siten myös $\mathcal{P}$:n oletukset. Induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_s \forall x_i A$. Siten jokaisella $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$, erityisesti siis valinnalla $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Koska t on vapaa muuttujalle x_i kaavassa A pätee tällöin sijoituslemman (Lause 6.5) nojalla $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$.

14. Oletetaan, että $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{array}$ on ehyt päättely ja t on vapaa muuttujalle x_i kaavassa A. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ A(t/x_i)\end{array}}{\exists x_i A}$. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat $\mathcal{R}$:n oletukset ja siten myös $\mathcal{P}$:n oletukset. Induktio-oletuksen nojlla $\mathcal{M} \models_s A(t/x_i)$. Sijoituslemman nojalla pätee tällöin $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$, missä $a = t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Koska $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$, pätee tällöin $\mathcal{M} \models_s \exists x_i A$.

15. Oletetaan, että $\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array}$ ja $\begin{array}{c}A\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}$ ovat ehyitä päättelyitä ja että x_i ei esiinny vapaana kaavassa B tai missään päättelyn $\mathcal{Q}$ oletuksessa paitsi kaavassa A. Olkoon $\mathcal{R}$ päättely $\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \exists x_i A\end{array} \quad \begin{array}{c}[A]\\ \mathcal{Q}\\ B\end{array}}{B}$. Olkoon $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, jotka toteuttavat päättelyn $\mathcal{R}$ oletukset. Tällöin ne toteuttavat päättelyn $\mathcal{P}$ oletukset ja siten induktio-oletuksen nojalla kaavan $\exists x_i A$. Siis jollakin $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} A$. Siten $\mathcal{M}$ ja $s(a/x_i)$ toteuttavat päättelyn $\mathcal{Q}$ oletuksen A. s toteuttaa $\mathcal{Q}$:n muut oletukset, ja koska x_i ei esiinny näissä vapaana, lauseen 4.7 nojalla, myös $s(a/x_i)$ toteuttaa nämä oletukset. Siis $s(a/x_i)$ toteuttaa kaikki $\mathcal{Q}$:n oletuket. Induktio-oletuksen nojalla pätee nyt $\mathcal{M} \models_{s(a/x_i)} B$. Koska x_i ei esiinny B:ssä vapaana, myös $\mathcal{M} \models_s B$.

□

Korollaari 7.8. *Jos on olemassa luonnollinen päättely A:lle, A on validi.*

Todistus. Luonnollinen päättely A:lle tarkoittaa päättelyä ilman oletuksia. Siten kaikki mallit ja tulkintafunktiot toteuttavat tämän päättelyn oletukset. Eheyslauseen nojalla A:n aakkoston mallit ja näiden kaikki tulkintafunktiot toteuttavat siten A:n, eli A on validi. □

Kuten propositiologiikassa, myös predikaattilogiikassa eheyslausetta voidaan käyttää osoittamaan, että jotakin *ei* voida päätellä annetuista oletuksista.

Esimerkki 7.9. Osoitetaan, ettei voida päätellä kaavaa $\exists y \forall x R(y,x)$ kaavasta $\forall x \exists y R(x,y)$. Olkoon nimittäin $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \{0,1\}$ ja $R^{\mathcal{M}} = \{(0,1),(1,0)\}$. Tällöin, jos s on $\mathcal{M}$-tulkintafunktio, niin

- $(s(0/x)(1/y)(x), s(0/x)(1/y)(y)) = (0,1) \in R^{\mathcal{M}}$, joten $\mathcal{M} \models_{s(0/x)(1/y)} R(x,y)$ ja siten $\mathcal{M} \models_{s(0/x)} \exists y R(x,y)$,
- $(s(1/x)(0/y)(x), s(1/x)(0/y)(y)) = (1,0) \in R^{\mathcal{M}}$, joten $\mathcal{M} \models_{s(1/x)(0/y)} R(x,y)$ ja siten $\mathcal{M} \models_{s(1/x)} \exists y R(x,y)$,

eli kaikilla $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ pätee $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} \exists y R(x,y)$ ja siten $\mathcal{M} \models_s \forall x \exists y R(x,y)$.

Kuitenkaan millään $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ ei päde $(a,a) \in R^{\mathcal{M}}$, joten $\mathcal{M} \not\models_{s(a/y)(a/x)} R(y,x)$ ja siten $\mathcal{M} \not\models_{s(a/y)} \forall x R(y,x)$ millään $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})$. Siten $\mathcal{M} \not\models \exists y \forall x R(y,x)$.

Näin ollaan osoitettu, että $\exists y \forall x R(y,x)$ ei ole kaavan $\forall x \exists y R(x,y)$ looginen seuraus. Eheyslauseen nojalla pätee tällöin

$$\forall x \exists y R(x,y) \nvdash \exists y \forall x R(y,x).$$

8 Aksioomat ja teoriat

Toisinaan logiikassa ei olla kiinnostuneita *kaikista* annetun aakkoston malleista, vaan vain tietynlaisista. Jos esimerkiksi aakkosto L sisältää kaksipaikkaisen relaatiosymbolin, saatetaan olla kiinnostuneita kaikkien L-mallien asemesta vain niistä, joissa relaation tulkinta muodostaa verkon (relaatio on symmetrinen ja silmukaton). Tällöin voidaan rajoittua tarkastelemaan vain niitä L-malleja, jotka toteuttavat verkkojen *aksioomat.* Tietyn mallikokoelman aksioomien kokoelmaa sanotaan *teoriaksi.*

Logiikan keskeisiä teemoja on kysymys, milloin tietty malliluokka voidaan kuvailla aksioomien avulla, eli aksiomatisoida. Esimerkiksi ryhmät, renkaat, kunnat ja vektoriavaruudet (yli annetun kunnan) voidaan aksiomatisoida, mutta esimerkiksi kaikkien äärellisten joukkojen kokoelmaa ei. Tähän kysymykseen perehdytään tarkemmin Matemaattisen logiikan ja Malliteorian kursseilla. Tässä luvussa tyydytään tarkastelemaan joitakin esimerkkejä teorioista sekä sitä, miten teoriat ilmenevät päättelyssä.

Määritelmä 8.1. Olkoon L aakkosto. (L-)*teoria* T on joukko L-lauseita. Teorian T alkioita sanotaan teorian *aksioomeiksi.* Jos $\mathcal{M}$ on L-malli ja $\mathcal{M} \models A$ kaikilla $A \in T$, M on *teorian T malli.* Jos L-lause B voidaan päätellä T:n aksioomeista, B on teorian T *teoreema.*

Esimerkki 8.2. Verkkojen aakkosto koostuu kaksipaikkaisesta relaatiosymbolista, yleensä merkitään tätä E (engl. sanasta edge, särmä). $\{E\}$-malli on verkko, jos E:n tulkinta on symmetrinen ja irrefleksiivinen. Jos käytetään lyhennysmerkintää xEy kaavalle $E(x,y)$, *verkkoteorian aksioomat* ovat:

V1 $\forall x \forall y (xEy \to yEx)$ (symmetrisyys)

V2 $\forall x \neg xEx$ (irrefleksiivisyys)

$\{E\}$-malli $\mathcal{G}$ on siis verkko, jos ja vain jos se toteuttaa aksioomat V1 ja V2, eli $\mathcal{G} \models V1$ ja $\mathcal{G} \models V2$.

Esimerkki 8.3. Toinen klassinen esimerkki on järjestyksen teoria. Valitaan aakkostoksi $L = \{<\}$ ja merkitään taas kaavaa $<(x, y)$ lyhyemmin $x < y$. Tällöin *järjestyksen aksioomat* ovat:

J1 $\forall x \, \neg x < x$ (irrefleksiivisyys)

J2 $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ (transitiivisuus)

J3 $\forall x \forall y(x < y \vee y < x \vee x = y)$ (totaalisuus)

Esimerkkejä järjestyken teorian malleista ovat luonnolliset luvut ja reaaliluvut tavanomaisella (tiukalla) järjestyksellään. Esimerkki järjestyksen teorian teoreemasta on $\forall x \forall y(x < y \to \neg y < x)$, minkä seuraava päättely osoittaa:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$}
\RightLabel{$\forall$ E, h1}
\UnaryInfC{$\forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$}
\RightLabel{$\forall$ E, h2}
\UnaryInfC{$\forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$}
\RightLabel{$\forall$ E, h3}
\UnaryInfC{$(x < y \wedge y < x) \to x < x$}
\AxiomC{$[x < y]^2$}
\AxiomC{$[y < x]^1$}
\RightLabel{$\wedge$ T}
\BinaryInfC{$x < y \wedge y < x$}
\RightLabel{$\to$ E}
\BinaryInfC{$x < x$}
\AxiomC{$\forall x \neg x < x$}
\RightLabel{$\forall$ E, h4}
\UnaryInfC{$\neg x < x$}
\RightLabel{$\wedge$ T}
\BinaryInfC{$x < x \wedge \neg x < x$}
\RightLabel{$\neg$ T, 1}
\UnaryInfC{$\neg y < x$}
\RightLabel{$\to$ T, 2}
\UnaryInfC{$x < y \to \neg y < x$}
\RightLabel{$\forall$ T, h5}
\UnaryInfC{$\forall y(x < y \to \neg y < x)$}
\RightLabel{$\forall$ T, h6}
\UnaryInfC{$\forall x \forall y(x < y \to \neg y < x)$}
\end{prooftree}
$$

Ehdot:
h1: x on vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
h2: y on vapaa muuttujalle y kaavassa $\forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
h3: x on vapaa muuttujalle z kaavassa $(x < y \wedge y < z) \to x < z$ ja $((x < y \wedge y < z) \to x < z)(x/z) = (x < y \wedge y < x) \to x < x$
h4: x on vapaa muuttujalle x kaavassa $\neg x < x$
h5: y ei esiinny vapaana päättelyn oletuksissa (huomaa, että tilapäiset oletukset $x < y$ ja $y < x$ on jo hylätty, joten ne eivät ole tässä vaiheessa enää oletuksia)
h6: x ei esiinny vapaana päättelyn oletuksissa

Esimerkki 8.4. Tässä materiaalissa *identiteettisymbolilla* on erityinen rooli. Sille ei anneta mallikohtaisia tulkintoja, vaan se tulkitaan jokaisessa mallissa todellisena yhtäsuuruutena:

$$=^{\mathcal{M}} = \{(a, a) \mid a \in \mathrm{dom}(\mathcal{M})\}.$$

Tämä johtuu siitä, että kaikessa hiljaisuudessa on oletettu, että kaikki mallit toteuttavat *identiteettiaksioomat*:

1. $\forall x\, x = x$
2. $\forall x \forall y (x = y \rightarrow y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$
4. $\forall x \forall y ((x = y \wedge P_i(x)) \rightarrow P_i(y))$
5. $\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n ((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \rightarrow R_i^n(y_1, \ldots, y_n))$

Aksioomeista ensimmäiset kolme ilmaisevat, että yhtäsuuruus on ekvivalenssirelaatio. Seuraavat ovat itse asiassa aksiooma*skeemoja*, jotka ilmaisevat, että aakkoston predikaatti- ja relaatiosymboleiden tulkinnat kunnioittavat tätä yhtäsuuruutta (jokaiselle aakkoston predikaatti- ja relaatiosymbolille tulee oma aksioomansa).

Esimerkkejä identieteettiaksioomien teoreemoista ovat $\forall x \exists y\, x = y$ ja $\exists x \forall y\, x = y \rightarrow \forall x \forall y\, x = y$.

Oletus, että kaikki tarkasteltavat mallit toteuttavat identiteettiaksioomat, tarkoittaa käytännössä sitä, että identiteettiaksioomeja voidaan käyttää päättelyiden oletuksena aina, kun se on tarpeen (käytännössä silloin, kun pääteltävissä kaavoissa esiintyy identiteettiä).

Esimerkki 8.5. Identiteettiä käyttäen, voidaan ilmaista, että mallissa on korkeintaan n alkiota:

$$\exists x_1 \cdots \exists x_n \forall y (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Sen sijaan predikaattilogiikalla ei voida ilmaista, että mallissa on äärellisen monta alkiota. Sen todistamiseen tämän kurssin työkalut eivät riitä, mutta väite todistetaan esim. kursseilla Matemaattinen logiikka tai Malliteoria.

9 Funktiot aakkostossa

Tähän mennessä on tarkasteltu aakkostoja, joissa ei ole funktiosymboleja. Funktiosymbolien lisääminen tuo käyttöön uudenlaisia termejä. Itse kaavojen määritelmään ne eivät vaikuta.

Funktiosymboleita käytetään, kun halutaan tarkastella funktioita malleissa. Nämä voivat olla yksipaikkaisia, kuten x^{-1} tai $\cos(x)$, tai monipaikkaisia, kuten lineaarikuvaukset $2x + 3y - z$ ja $x - y$.

Funktioita varten lisätään aakkostoon n-paikkaiset $(n \geq 1)$ *funktiosymbolit*

$$F_0^n, F_1^n, \ldots \text{(käytännössä usein } F,\ F',\ G,\ G', \ldots)$$

Jos aakkostossa L esiintyy funktiosymboli F_i^n on jokaisessa L-mallissa $\mathcal{M}$ oltava symbolille tulkinta. n-paikkaisen funktiosymbolin tulkinta on (totaali) n-paikkainen funktio M:ssä:

$$(F_i^n)^{\mathcal{M}} : M^n \rightarrow M.$$

Totaalisuusvaatimus tarkoittaa, että funktion on oltava määritelty koko joukossa M^n. Siten esimerkiksi $(\mathbb{R}, \frac{1}{x})$ ei ole aakkoston $\{F\}$ malli, koska $\frac{1}{x}$ ei ole määritelty koko mallin universumissa.

Funktiosymbolien avulla voidaan muodostaa uusia termejä. Funktioita yhdistämällä saadaan jo yhdellä funktiosymbolilla numeroituvan monta uutta termiä. Esimerkkejä tällaisista termeistä ovat

$$F(x), F(F(x)), F(c), G(x, c), G(F(x), c) \ldots$$

Nyt voidaan antaa lopullinen määritelmä L-termeille (määritelmässä 2.1 rajoituttiin aakkostoihin ilman funktiosymboleita):

Määritelmä 9.1 (L-termi)**.** Olkoon L aakkosto. Tällöin L-termien joukko määritellään seuraavasti:

1. Muuttujat $x_0, x_1, \ldots$ ovat L-termejä.
2. Jos $c_i \in L$ on vakiosymboli, c_i on L-termi.
3. Jos $F_i^n \in L$ on n-paikkainen funktiosymboli ja $t_1, \ldots, t_n$ ovat L-termejä, niin myös $F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$ on L-termi.

Termejä, joissa ei esiinny muuttujia, sanotaan *vakiotermeiksi.* Vakiosymbolien lisäksi vakiotermejä ovat esim. $F(c), F(F(c)), G(c, F(c))$ jne.

Termejä käytetään kuten aiemmin atomikaavoissa

- $t_1 = t_2$, esim. $F(x) = G(c, H(x, y, z))$
- $R(t_1, \ldots, t_n)$, esim. $R(x, F(x), F(F(x)))$

Jotta näiden toteutuminen voidaan määritellä, on laajennettava termin arvon määritelmää:

Määritelmä 9.2 (Termin arvo)**.** Olkoon L aakkosto, $\mathcal{M}$ L-malli ja s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio.

1. Jos $t = x_i$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = x_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x_i)$.
2. Jos $t = c_i$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c_i^{\mathcal{M}}$.
3. Jos $t = F_i^n(t_1, \ldots, t_n)$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F_i^n(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle =$
$$(F_i^n)^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle).$$

Termin $F(t_1, t_2)$ arvon määrittämiseksi on siis ensin määritettävä termien t_1 ja t_2 arvot (induktiivinen määritelmä). Tämä antaa kaksi mallin alkiota, sanotaan a ja b. Tämän jälkeen tarkastellaan, mikä funktio on F:n tulkinta mallissa, ja lasketaan tämän funktion arvo parametreilla a ja b.

Esimerkki 9.3. Olkoon $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, F^{\mathcal{M}}, G^{\mathcal{M}}, c_0^{\mathcal{M}}, c_1^{\mathcal{M}})$,missä $F^{\mathcal{M}}(m) = m+1$, $G^{\mathcal{M}}(m,n) = m+n$, $c_0^{\mathcal{M}} = 0$ ja $c_1^{\mathcal{M}} = 1$. Halutaan selvittää, päteekö

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x,y),$$

kun $s(x) = 0$ ja $s(y) = 2$. Nyt

$$F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = F^{\mathcal{M}}(c_1^{\mathcal{M}}) = 1+1 = 2$$

ja

$$G(x,y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G^{\mathcal{M}}(x^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, y^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = G^{\mathcal{M}}(s(x), s(y)) = 0+2 = 2.$$

Siten $F(c_1)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = G(x,y)^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ ja Tarskin totuusmääritelmän (muotoa $t = t'$ oleville atomikaavoille) nojalla pätee

$$\mathcal{M} \models_s F(c_1) = G(x,y).$$

Esimerkki 9.4. Funktiosymbolin $\circ$ avulla voidaan käsitellä esim. ryhmän laskutoimitusta. (Tässä käytetään lyhennysmerkintää $a \circ b$ kaavalle $\circ(a,b)$.) Ryhmäaksioomat ovat silloin seuraavat predikaattilogiikan lauseet (yksinkertaisuuden vuoksi on myös lisätty vakiosymboli e neutraalialkiolle):

$$\begin{aligned}
&\forall x \forall y \forall z ((x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)) \\
&\forall x (x \circ e = x \wedge e \circ x = x) \\
&\forall x \exists y (x \circ y = e \wedge y \circ x = e)
\end{aligned}$$

Nyt jokainen $\{\circ, e\}$-malli, joka toteuttaa ylläolevat aksioomat, on ryhmä. Huomaa, että ryhmäaksiooma G0 "jokaisella $a, b \in G$ pätee $a \circ b \in G$" seuraa siitä, että $\circ$ on funktiosymboli, jolloin sen tulkinnan on oltava totaali, eli määritelty kaikille pareille $(a,b) \in G^2$.

Esimerkki 9.5. Toinen klassinen struktuuri on $(\mathbb{N}, s)$, missä s on seuraajafunktio $s(n) = n+1$. Usein lisätään 0 vakiosymboliksi. Mallilla on mm. seuraavat ominaisuudet:

- $s(n) = s(m) \to n = m$,
- jos $n \neq 0$, niin jollakin m pätee $s(m) = n$.

Mallissa pätee myös nk. *induktioskeema*: Jos A on $\{s, 0\}$-kaava, niin

$$(A(0/x_0) \wedge \forall x_0 (A \to A(s(x_0)/x_0))) \to \forall x_0 A$$

on induktioaksiooma. Induktioskeema antaa siten aksiooman jokaiselle kaavalle A.

Kun aakkosto sisältää funktiosymboleita, sijoitettavia termejä on entistä useampia. Sijoituksissa on myös oltava tarkkana, koska termit voivat sisältää useita muuttujasymboleita, joten sen tarkistaminen, onko termi vapaa annetulle muuttujalle kaavassa, vaatii kaikkien termissä esiintyvien muuttujien huomioimista. Siten esim. termi $F(x,x)$ on vapaa muuttujalle x kaavassa $\forall y R(x,y)$, mutta termi $F(x,y)$ ei, koska $F(x,y)$ sisältää muuttujan y, joka sijoituksessa tulisi sidotuksi.

Esimerkki 9.6. Päätellään $\forall x \exists y\, F(x) = y$. Käytetään oletuksena ensimmäistä identiteettiaksioomaa.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\, x = x}{F(x) = F(x)}\ \forall\text{ E, h1}}{\exists y\, F(x) = y}\ \exists\text{ T, h2}}{\forall x \exists y\, F(x) = y}\ \forall\text{ T, h3}$$

Ehdot:
h1: $F(x)$ on vapaa muuttujalle x kaavassa $x = x$
h2: $F(x)$ on vapaa muuttujalle y kaavassa $F(x) = y$ ja $F(x) = y\,(F(x)/y)$ on $F(x) = F(x)$
h3: x ei esiinny vapaana päättelyn oletuksessa.

Funktiosymbolit vaativat myös uuden identiteettiaksiooman (tai tarkemmin identiteettiaksioomaskeeman, yksi aksiooma kullekin funktiosymbolille):

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots, y_n)).$$

Nyt voidaan koota kattava lista identiteettiaksioomeista (yksi- ja kaksipaikkaiset relaatiosymbolit ovat vain erikoistapaus yleisemmistä n-paikkaisista relaatiosymboleista):

1. $\forall x\, x = x$
2. $\forall x \forall y(x = y \to y = x)$
3. $\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$
4. $\forall x_1 \cdots \forall x_n \forall y_1 \cdots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge R_i^n(x_1, \ldots, x_n)) \to R_i^n(y_1, \ldots, y_n))$
5. $\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n((x_1 = y_1 \wedge \cdot \wedge x_n = y_n) \to F_i^n(x_1, \ldots, x_n) = F_i^n(y_1, \ldots, y_n))$

10 Isomorfismi

Matemaattisten mallien kohdalla ollaan yleensä kiinnostuneita vain mallin rakenteesta, ei niinkään siitä, mistä joukoista nämä mallit on rakennettu. Esimerkiksi viiden alkion lineaarijärjestys voi olla

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4,$$

mutta yhtä hyvin voitaisiin valita viisi eri reaalilukua (esim. 0,25, e, π, 4 ja $\sqrt{20}$) tai viisi abstraktia alkiota $a < b < c < d < e$. Rakenne on joka tapauksessa sama, vain alkioiden nimet vaihtelevat, eivätkä ne 'näy' mallissa. Tätä ilmiötä ilmaistaan sanomalla, että yllä mainitut mallit ovat keskenään *isomorfiset.*

Määritelmä 10.1. Olkoon L aakkosto ja olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi L-mallia. Funktio f on *isomorfismi* mallien $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ välillä (merk. $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$), jos:

1. f on bijektio $f : M \to M'$ mallien unversumien välillä ($M = \mathrm{dom}(\mathcal{M})$ ja $M' = \mathrm{dom}(\mathcal{M}')$),

2. jokaisella vakiosymbolilla $c \in L$ pätee
$$f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'},$$

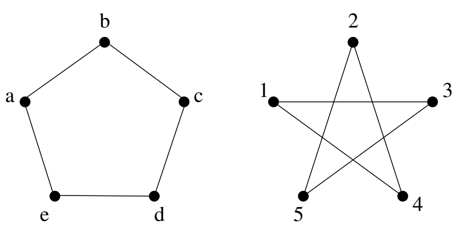
3. jokaisella n-paikkaisella ($n > 1$) relaatiosymbolilla $R \in L$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in M$ pätee
$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}} \text{ jos ja vain jos } (f(a_1), \ldots, f(a_n)) \in R^{\mathcal{M}'}$$
ja yksipaikkaisen predikaattisymbolin $P \in L$ tapauksessa
$$a_1 \in P^{\mathcal{M}} \text{ jos ja vain jos } f(a_1) \in P^{\mathcal{M}'},$$

4. jokaisella n-paikkaisella funktiosymbolilla $F \in L$ ja kaikilla $a_1, \ldots, a_n \in M$ pätee
$$f(F^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = F^{\mathcal{M}'}(f(a_1), \ldots, f(a_n)).$$

Jos on olemassa isomorfismi $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, mallit $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat *isomorfiset.*

Intuitiivisesti ilmaistuna kaksi mallia ovat isomorfiset, jos ne ovat alkioiden nimeämistä vaille samanlaiset.

Esimerkki 10.2. Kuvan 5 verkot ovat isomorfiset.



Kuva 5: Kaksi isomorfista verkkoa

Isomorfisuuden voi osoittaa esimerkiksi isomorfismilla f, missä
$$f(a) = 1,\ f(b) = 3,\ f(c) = 5,\ f(d) = 2,\ f(e) = 4.$$

Tällä kuvauksella vasemman verkon solmuparit kuvautuvat sellaiselle oikean verkon solmuparille, että ensimmäisten välillä on särmä jos ja vain jos niiden kuvien välillä on särmä.

Esimerkki 10.3. Olkoon L aakkosto, jossa on yksi vakiosymboli, yksi predikaattisymboli ja yksi yksipaikkainen funktiosymboli, $L = \{c, P, F\}$. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ seuraavat L-mallit: $\mathrm{dom}(\mathcal{M}) = \mathrm{dom}(\mathcal{M}') = \{0,1,2,3,4,5\}$, $c^{\mathcal{M}} = 0$, $c^{\mathcal{M}'} = 2$, $P^{\mathcal{M}} = \{0,1,2\}$, $P^{\mathcal{M}'} = \{2,4,5\}$ ja $F^{\mathcal{M}}$ ja $F^{\mathcal{M}'}$ ovat molemmat funktio $a \mapsto a + 1($ mod 6) eli $F^{\mathcal{M}}(0) = F^{\mathcal{M}'}(0) = 1$, $F^{\mathcal{M}}(1) = F^{\mathcal{M}'}(1) = 2, \dots, F^{\mathcal{M}}(4) = F^{\mathcal{M}'}(4) = 5$, $F^{\mathcal{M}}(5) = F^{\mathcal{M}'}(5) = 0$. Tällöin $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ *eivät ole isomorfiset.*

Osoitetaan epäisomorfisuus vastaoletuksen kautta. Jos $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ olisi isomorfismi, niin olisi oltava

$$f(0) = f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'} = 2.$$

Tällöin olisi oltava myös

$$f(1) = f(F^{\mathcal{M}}(0)) = F^{\mathcal{M}'}(f(0)) = F^{\mathcal{M}'}(2) = 3.$$

Mutta $1 \in P^{\mathcal{M}}$, joten nyt täytyisi olla myös $f(1) \in P^{\mathcal{M}'}$. Kuitenkaan $3 \notin P^{\mathcal{M}'}$, joten f ei voi olla isomorfismi.

Logiikan kannalta isomorfiset mallit ovat aivan samanlaiset. Tästä seuraa mm. että isomorfiset mallit toteuttavat samat lauseet. Tämän todistamiseksi (induktiolla) täytyy kuitenkin tarkastella kaavoja, ja niiden toteutuminen riippuu tarkasteltavasta tulkintafunktiosta. Tästä syystä tarvitaan jokin tapa vertailla tulkintafunktioita eri malleissa.

Määritelmä 10.4. Olkoot $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi isomorfista L-mallia ja olkoon f isomorfismi $\mathcal{M} \to \mathcal{M}'$. $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s ja $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio s' ovat *konjugaatteja* isomorfismin f suhteen, jos $s'(x) = f(s(x))$ kaikilla muuttujilla x.

Nyt voidaan osoittaa, että jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat kaksi isomorfista mallia ja s ja s' mallien tulkintafunktioita, jotka ovat konjugaatteja, niin kaikilla kaavoilla A pätee $\mathcal{M} \models_s A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Aloitetaan termejä koskevalla lemmalla.

Lemma 10.5. *Olkoon L aakkosto ja $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi isomorfista L-mallia. Olkoon s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio ja s' $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio ja $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ isomorfismi niin, että s ja s' ovat konjugaatteja isomorfismin f suhteen. Tällöin jokaiselle L-termille t pätee:*

$$f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Todistus. Väite todistetaan induktiolla termin rakenteen suhteen.

Tapaus 1: t on vakiosymboli c. Tällöin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = c^{\mathcal{M}}$ ja $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = c^{\mathcal{M}'}$. Koska f on isomorfismi, niin $f(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{M}'}$. Siten $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Tapaus 2: t on muuttuja x. Tällöin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = s(x)$ ja $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = s'(x)$. Koska s ja s' ovat konjugaatteja isomorfismin f suhteen, niin $f(s(x)) = s'(x)$. Siten $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$.

Tapaus 3: t on termi $F(t_1, \ldots, t_n)$ ja (induktio-oletus:) väite pätee termeille $t_1, \ldots, t_n$. Tällöin

$$t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) \text{ ja } t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = F^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle).$$

Induktio-oletuksen nojalla $f(t_i^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t_i^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$ kaikilla $1 \leq i \leq n$ ja koska f on isomorfismi, on $f(F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = F^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle))$. Siten

$$\begin{aligned} f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) &\overset{\text{määr.}}{=} f(F^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\ &\overset{f \text{ isom.}}{=} F^{\mathcal{M}'}(f(t_1^{\mathcal{M}}\langle s\rangle), \ldots, f(t_n^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)) \\ &\overset{\text{ind.ol.}}{=} F^{\mathcal{M}'}(t_1^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle, \ldots, t_n^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle) \\ &\overset{\text{määr.}}{=} t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle \end{aligned}$$

□

Lause 10.6. *Olkoot L aakkosto, $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ kaksi isomorfista L-mallia, s $\mathcal{M}$-tulkintafunktio ja s' $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio niin, että $f : \mathcal{M} \cong \mathcal{M}'$ on isomorfismi ja s ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen. Tällöin jokaisella L-kaavalla A pätee:*

$$\mathcal{M} \models_s A \textit{ jos ja vain jos } \mathcal{M}' \models_{s'} A.$$

Todistus. Oletetaan, että $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ on isomorfismi. Todistetaan lause induktiolla kaavan A rakenteen suhteen samanaikaisesti kaikille $\mathcal{M}$-tulkintafunktioille s ja $\mathcal{M}'$-tulkintafunktioille s', jotka ovat konjugaatteja f:n suhteen.

Alkuaskeleessa osoitetaan väite atomikaavoille:

Oletetaan, että A on kaava $t = t'$ ja s ja s' ovat konjugaatteja. Jos $\mathcal{M} \models_s A$, niin $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$ ja siten $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$. Lemman 10.5 nojalla $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$ ja $f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$, joten

$$t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle.$$

Kääntäen, jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, niin $t^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle = t'^{\mathcal{M}'}\langle s'\rangle$, ja taas Lemman 10.5 nojalla on tällöin $f(t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle) = f(t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle)$. Koska f on injektio, on $t^{\mathcal{M}}\langle s\rangle = t'^{\mathcal{M}}\langle s\rangle$, jolloin $\mathcal{M} \models_s t = t'$.

Tapaus, missä A on muotoa $R^n(t_1, \ldots, t_n)$ jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Induktioaskeleessa oletetaan induktio-oletuksena, että $\mathcal{M} \models_s B$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ kaikilla tulkintafunktioilla s ja s', jotka ovat konjugaatteja f:n suhteen. Vastaava ominaisuus oletetaan myös kaavalta C.

Jos A on kaava $\neg B$ ja s ja s' ovat konjugaatteja, niin

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models_s A &\text{ jos ja vain jos } \mathcal{M} \not\models_s B \quad \text{(Tarskin totuusmääritelmä)} \\ &\text{ jos ja vain jos } \mathcal{M}' \not\models_{s'} B \quad \text{(induktio-oletus)} \\ &\text{ jos ja vain jos } \mathcal{M}' \models_{s'} A \quad \text{(totuusmääritelmä).} \end{aligned}$$

Jos A on kaava $B \wedge C$ ja s ja s' ovat konjugaatteja, niin $\mathcal{M} \models_s A$, jos ja vain jos $\mathcal{M} \models_s B$ ja $\mathcal{M} \models_s C$. Induktio-oletuksen nojalla tämä pätee jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} B$ ja $\mathcal{M}' \models_{s'} C$, mikä edelleen on yhtäpitävää ehdon $\mathcal{M}' \models_{s'} B \wedge C$ kanssa.

Tapaukset, missä A on $B \vee C$, $B \to C$ tai $B \leftrightarrow C$ jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi.

Olkoon sitten A kaava $\exists x B$ ja olkoot s ja s' tulkintafunktioita, jotka ovat konjugaatteja. Jos $\mathcal{M} \models_s A$, niin on olemassa $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$, jolla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Koska s ja s' ovat konjugaatteja, pätee kaikilla muuttujilla *paitsi* muuttujalla x:

$$f(s(a/x)(y)) = f(s(y)) = s'(y) = s'(f(a)/x)(y).$$

Toisaalta muuttujalle x pätee

$$f(s(a/x)(x)) = f(a) = s'(f(a)/x)(x).$$

Siten tulkintafunktiot $s(a/x)$ ja $s'(f(a)/x)$ ovat konjugaatteja. Induktio-oletuksen nojalla pätee tällöin $\mathcal{M}' \models_{s'(f(a)/x)} B$ ja koska $f(a) \in \operatorname{dom}(\mathcal{M}')$, pätee $\mathcal{M}' \models_{s'} \exists x B$ eli $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Toisaalta, jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, niin jollakin $b \in \operatorname{dom}(\mathcal{M}')$ pätee $\mathcal{M}' \models_{s'(b/x)} B$. Koska f on surjektiivinen, niin on olemassa $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{M})$, jolla $f(a) = b$. Tällöin $s(a/x)$ ja $s'(b/x)$ ovat konjugaatteja f:n suhteen, joten induktio-oletuksen nojalla $\mathcal{M} \models_{s(a/x)} B$. Tarskin totuusmääritelmän nojalla pätee tällöin $\mathcal{M} \models_s A$.

Tapaus, missä A on kaava $\forall x B$ jätetään lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Korollaari 10.7. *Jos $\mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}'$ ovat kaksi isomorfista L-mallia ja A on L-lause, niin*

$$\mathcal{M} \models A \textit{ jos ja vain jos } \mathcal{M}' \models A.$$

Todistus. Oletetaan, että $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ on isomorfismi ja $\mathcal{M} \models A$. Tämä tarkoittaa, että $\mathcal{M} \models_s A$ kaikilla $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla s. Olkoon s' mielivaltainen $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio. Määritellään $\mathcal{M}$-tulkintafunktio s'' ehdolla

$$s''(x) = f^{-1}(s'(x))$$

kaikille muuttujille x (tämä on mahdollista, koska f on bijektio, ja siten f^{-1} on määritelty). Näin s'' ja s' ovat konjugaatteja f:n suhteen, joten edellisen lauseen nojalla $\mathcal{M} \models_{s''} A$ jos ja vain jos $\mathcal{M}' \models_{s'} A$. Koska $\mathcal{M} \models_s A$ kaikilla $\mathcal{M}$-tulkintafunktioilla, on siis oltava $\mathcal{M}' \models_{s'} A$, ja koska s' oli mielivaltainen tämä pätee kaikilla $\mathcal{M}'$-tulkintafunktioilla s' ja siten $\mathcal{M}' \models A$.

Jos toisaalta $\mathcal{M} \not\models A$, niin jollakin $\mathcal{M}$-tulkintafunktiolla s pätee $\mathcal{M} \not\models_s A$. Tällöin voidaan määritellä $\mathcal{M}'$-tulkintafunktio s' ehdolla

$$s'(x) = f(s(x)),$$

jolloin s ja s' ovat konjugaatteja. Siten edellisen lauseen nojalla $\mathcal{M}' \not\models_{s'} A$ ja siten $\mathcal{M}' \not\models A$. □

Edellä todistettu korollaari osoittaa, että isomorfisia malleja ei voida erottaa toisistaan predikaattilogiikan kaavoilla. Luonnollinen jatkokysymys on, ovatko kaikki mallit, jotka toteuttavat samat kaavat, isomorfisia keskenään. Vastaus tähän on kielteinen. Voidaan osoittaa, että esim. lineaarijärjestykset $(\mathbb{Q}, <)$ ja $(\mathbb{R}, <)$ toteuttavat samat lauseet (todistus perustuu nk. Ehrenfeucht-Fraïssé-peleihin), mutta koska $\mathbb{Q}$ on numeroituva ja $\mathbb{R}$ ei, mallit eivät voi olla isomorfisia. Sen sijaan äärelliset lineaarijärjestykset ovat isomorfisia jos ja vain jos ne toteuttavat samat lauseet. Tämä johtuu siitä, että äärellisen aakkoston äärellisen mallin kaikki ominaisuudet (mukaan lukien mallin koko) voidaan kuvailla jo yhdellä predikaattilogiikan lauseella.