Henkivakuutusmatematiikka 12.4.2017
Erilliskoe 3h 30min

1. Olkoon lainan määrä L ja laina-aika 3 vuotta. Laina nostetaan hetkellä 0 ja maksetaan takaisin ekvivalenssiperiaatteen mukaisilla suorituksilla $B(k)$ siten, että suoritus $B(k)$ tapahtuu hetkellä k, $k = 1, 2, 3$. Lainaan sovelletaan kiinteää vuosikorkoa $i \geq 0$. Olkoon $B(2) = iL/2$ ja $B(3) = (1+i)L/2$. Määrää lyhennyksen osuus suorituksissa $B(1)$, $B(2)$ ja $B(3)$.

2. Kuolemanvaravakuutuksen vakuutuskausi on kaksi vuotta ja korvaussumma vakio S. Kuolevuus on vakio $\mu > 0$ ja korkoutuvuus

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1, & \text{kun t } \in [0,1) \\ \delta_2, & \text{kun t } \in [1,2), \end{cases}$$

missä δ_1 ja δ_2 ovat positiivisia vakioita. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

3. Kertamaksuisessa vakuutuksessa vakuutettu saa hetkellä n korvauksen S, jos on tällöin elossa. Lisäksi vakuutetulle hyvitetään vastuuvelan korkotuotto siten, että yhtiö maksaa elossaolevalle vakuutetulle jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\delta(t)V(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$, missä $\delta(t)$ ja $V(t)$ ovat korkoutuvuus ja vastuuvelka hetkellä t. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun kuolevuus μ ja δ ovat jatkuvia funktioita ja vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä 0.

4. Sairausvakuutuksessa yhtiö maksaa seuraavan vuoden aikana vakuutetulle jatkuvaa korvausta intensiteetillä S vakuutetun ollessa sairas. Mallinnetaan vakuutetun tila Markov-prosessiksi, jossa mahdollisia tiloja ovat 'terve' ja 'sairas' (kuolevuus tarkasteltavalla ikävälillä oletetaan nollaksi). Oletetaan, että terve sairastuu intensiteetillä σ ja että sairas paranee intensiteetillä τ, missä σ ja τ ovat positiivisia vakioita. Korkoutuvuus oletetaan positiiviseksi vakioksi δ. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun vakuutettu on vuoden alussa terve. Millä todennäköisyydellä vakuutettu saa korvausta kyseisen vuoden aikana.

Tehtävässä voi tarvittaessa käyttää tietoa: $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ silloin ja vain silloin kun

$$y(t) = e^{-A(t)}[\int e^{A(t)}b(t)dt + C],$$

missä A on jokin a:n integraalifunktio ja C mielivaltainen reaalivakio (a ja b ovat jatkuvia funktioita).

Henkivakuutusmatematiikka 12.4.-17

1. $L = \frac{B(1)}{1+i} + \frac{B(2)}{(1+i)^2} + \frac{B(3)}{(1+i)^3}$

$= \frac{B(1)}{1+i} + \frac{iL}{2(1+i)^2} + \frac{L}{2(1+i)^2} = \frac{B(1)}{1+i} + \frac{L}{2(1+i)}$

$\Rightarrow B(1) = (1+i)L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} + iL$

Lainan määrä hetkellä 1 on $\frac{L}{2}$, hetkellä 2 $\frac{L}{2}$, hetkellä 3 0.
Lyhennykset ovat $L/2$, 0, $L/2$.

2. $P = \mathbb{E}\left(e^{-\int_0^T \delta(s)ds} S \, 1(T \leq 2)\right)$

$= \int_0^2 \mu e^{-\mu t} e^{-\int_0^t \delta(s)ds} dt$

$= \int_0^1 \mu e^{-\mu t} e^{-\delta_1 t} dt + \int_1^2 e^{-\delta_1} \mu e^{-\mu t} e^{-(t-1)\delta_2} dt$

$= \frac{\mu}{\mu+\delta_1}\left[1 - e^{-(\mu+\delta_1)}\right] + \frac{\mu}{\mu+\delta_2} e^{-(\mu+\delta_1)}\left[1 - e^{-(\mu+\delta_2)}\right]$

3. Harj. 7, tehtävä 1

4.

$$\begin{tikzcd} \boxed{1} \arrow[r, bend left, "\sigma"] & \boxed{2} \arrow[l, bend left, "\tau"] \end{tikzcd}$$

1 = terve, 2 = sairas

$$\begin{cases} dP_{11}(t) = \left(-\sigma P_{11}(t) + \tau P_{12}(t)\right)dt & \left(P_{1j}(t) = P_{1j}(0,t)\right) \\ dP_{12}(t) = \left(-\tau P_{12}(t) + \sigma P_{11}(t)\right)dt \end{cases}$$

$$P_{11}'(t) = -\sigma P_{11}(t) + \tau P_{12}(t) = -(\sigma+\tau)P_{11}(t) + \tau$$

$$\Rightarrow \quad P_{11}(t) = C e^{-(\sigma+\tau)t} + \frac{\tau}{\sigma+\tau}$$

$$P_{11}(0) = 1 \Rightarrow C = \frac{\sigma}{\sigma+\tau}, \quad P_{11}(t) = \frac{1}{\sigma+\tau}\left[\sigma e^{-(\sigma+\tau)t} + \tau\right]$$

$$P_{12}(t) = \frac{\sigma}{\sigma+\tau}\left(1 - e^{-(\sigma+\tau)t}\right)$$

$$P = S\int_0^1 e^{-\delta t} P_{12}(t)\,dt = \frac{S\sigma}{\sigma+\tau}\left[\frac{1-e^{-\delta}}{\delta} - \frac{1-e^{-(\delta+\sigma+\tau)}}{\delta+\sigma+\tau}\right]$$

korvausta saa todennäköisyydellä $1 - \bar{P}_{11}(0,1)$

$$1 - e^{-\int_0^1 \sigma\,dt} = 1 - e^{-\sigma}.$$