Henkivakuutusmatematiikka 1.2.2017
Erilliskoe 3h 30min

1. Populaatiossa vastasyntyneen elinaikaan liittyvä kuolevuus on jatkuva funktio μ (joka on sama kaikille populaation jäsenille). Lisäksi jäsenten elinajat ovat toisistaan riippumattomia. Populaation jäsen j on x_j-ikäinen, $j = 1, 2$. Olkoon τ_j jäsenen j jäljellä oleva elinaika.

a) Määrää elinaikaan $\min(\tau_1, \tau_2)$ liittyvä kuolevuus.

b) Määrää todennäköisyys $\mathbb{P}(\max(\tau_1, \tau_2) > t)$, $t > 0$.

2. Eläkevakuutuksen vakuutuskausi on kolme vuotta. Hetkellä k maksetaan summa S_k, mikäli vakuutettu on tällöin elossa, $k = 1, 2, 3$. Olkoon korkoutuvuus $\delta(t) = \delta_0 + at$ alueessa $t \geq 0$ ja vastasyntyneen kuolevuus ce^{bt} alueessa $t > 0$, missä δ_0, a, b ja c ovat positiivisia vakioita. Sopimus tehdään hetkellä 0, jolloin vakuutettu on x-ikäinen.

a) Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

b) Vakuutusmaksu maksetaan kahtena tasaeränä hetkinä 0 ja 1/2 (vakuutetun eläessä). Määrää erän suuruus.

3. Kuolemanvaravakuutuksessa korvauksena maksetaan kuolinhetkellä T summa $S(t)$, jos $T = t \in [0, n]$. Vakuutusmaksua maksetaan vakuutetun eläessä jatkuvasti intensiteetillä $\bar{P}(t)$ hetkellä $t, \forall t \in [0, n]$. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio, kuolevuus μ ja korvausfunktio S jatkuvia ja vakuutettu x-ikäinen. Olkoon $V(t)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä $t \in [0, n]$. Määrää sellainen ekvivalenssiperiaatteen mukainen maksuintensiteetti $\bar{P}(t), t \in [0, n]$, että $V(t) = C$ (=vakio), $\forall t \in [0, n]$. Määrää myös C.

4. Olkoon vakuutetun tilaa kuvaavan Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Olkoot siirtymäintensiteetit μ_{0j} ja μ_{kN} positiivisia vakioita, $j = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, N-1$. Muut siirtymäintensiteetit ovat nollia. Tilojen tulkinnat ovat

$$0 = \text{aktiivi}, \quad j = \text{työkyvytön syystä } j,\ j = 1, \ldots, N-1, \quad N = \text{kuollut}.$$

Oletetaan, että

$$\mu_{jN} - \mu_{01} - \mu_{02} - \cdots - \mu_{0N} \neq 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Vakuutussopimuksen mukaan vakuutetulle maksetaan jatkuvaa eläkettä vakuutuskauden $[0, n]$ aikana tilassa j intensiteetillä $\bar{S}_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, N-1\}$. Vakuutus on ketamaksullinen.

a) Esitä vakuutuksen vastuuvelkaa kuvaavat Thielen yhtälöt.

b) Määrää vakuutuksen vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$, kun vakuutettu on tällöin tilassa $j \in \{1, \ldots, N-1\}$.

Tehtävässä voi tarvittaessa käyttää tietoa: $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ silloin ja vain silloin kun

$$y(t) = e^{-A(t)}[\int e^{A(t)}b(t)dt + C],$$

missä A on jokin a:n integraalifunktio ja C mielivaltainen reaalivakio (a ja b ovat jatkuvia funktioita).

Henkivakuutusmatematiikka, 1.2.-17

1. a) $\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{P}(\tau_1 > t)\,\mathbb{P}(\tau_2 > t)$ $\quad(\tau = \min(\tau_1, \tau_2))$

$$= e^{-\int_{x_1}^{x_1+t} \mu(s)\,ds}\, e^{-\int_{x_2}^{x_2+t} \mu(s)\,ds} = e^{-\int_0^t (\mu(x_1+s)+\mu(x_2+s))\,ds},$$

$$= e^{-\int_0^t \nu(s)\,ds}, \quad \nu(t) = \mu(x_1+t)+\mu(x_2+t) \text{ on kuolevuus.}$$

b) $\mathbb{P}(\max(\tau_1,\tau_2) \le t) = \mathbb{P}(\tau_1 \le t)\,\mathbb{P}(\tau_2 \le t)$

$$= (1 - \mathbb{P}(\tau_1 > t))(1 - \mathbb{P}(\tau_2 > t))$$

$$= 1 - e^{-\int_0^t \mu(x_1+s)\,ds} - e^{-\int_0^t \mu(x_2+s)\,ds} + e^{-\int_0^t \nu(s)\,ds}$$

josta $\mathbb{P}(\max(\tau_1,\tau_2) > t) = 1 - \mathbb{P}(\max(\tau_1,\tau_2) \le t)$ saadaan.

2. a) $P = \sum_{k=1}^{3} S_k\, e^{-\int_0^k \delta(s)\,ds}\, e^{-\int_0^k \mu(x+s)\,ds}$

$$= \sum_{k=1}^{3} S_k\, e^{-(\delta_0 k + \frac{1}{2} a k^2 + \frac{c e^{bx}}{b}(e^{bk}-1))},$$

b) $P^{(2)}\left(1 + e^{-\int_0^{1/2} \delta(s)\,ds}\, e^{-\int_0^{1/2} \mu(x+s)\,ds}\right) = P$

$$\Rightarrow P^{(2)} = P \Big/ \left(1 + e^{-(\delta_0/2 + a/8 + \frac{c e^{bx}}{b}(e^{b/2}-1))}\right).$$

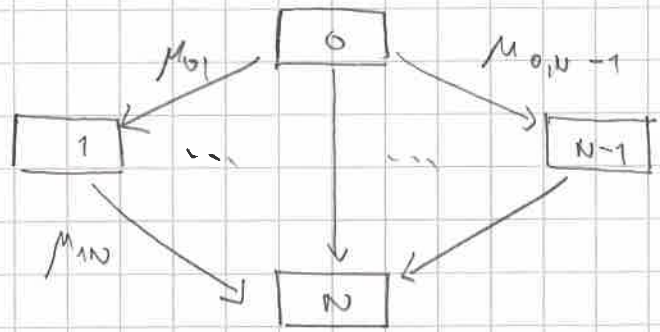
3. Thielen yhtälö:

$$V'(t) = (\delta + \mu(x+t))V(t) - S(t)\mu(x+t) + \bar{P}(t)$$

Jos $V(t) = C$, niin oltava $C = \lim_{t\to 0+} V(t) = 0$, jolloin

$$\bar{P}(t) = S(t)\mu(x+t).$$

4)



Thielen yhtälöt

$$\begin{cases} V_0'(t) = \delta V_0(t) + \sum_{j=1}^{N} \mu_{0j}\left(V_0(t) - V_j(t)\right) \\ V_k'(t) = \delta V_k(t) + \mu_{kN} V_k(t) - \bar{S}_k, \quad k = 1, \dots, N-1 \\ V_N(t) = 0 \end{cases}$$

Nähdään, että

$$V_k(t) = C e^{(\delta + \mu_{kN})t} + \frac{\bar{S}_k}{\delta + \mu_{kN}}$$

koska $V_k(n-) = 0$, on

$$V_k(t) = \frac{\bar{S}_k}{\delta + \mu_{kN}} \left[1 - e^{-(n-t)(\delta + \mu_{kN})}\right].$$