Henkivakuutusmatematiikka 14.12.2016
Erilliskoe 3h 30min

1. Olkoon lainan määrä L, laina-aika 3 vuotta ja vuosikorko vakio $i \geq 0$. Laina nostetaan hetkellä 0 ja maksetaan takaisin ekvivalenssiperiaatteen mukaisilla suorituksilla $B(k)$ siten, että suoritus $B(k)$ tapahtuu hetkellä k, $k = 1, 2, 3$. Olkoon

$$B(2) = (1 + 2i)L/2 \quad \text{ja} \quad B(3) = (1 + i)L/2.$$

Määrää $B(1)$ sekä lyhennyksen osuus suorituksissa $B(1)$, $B(2)$ ja $B(3)$.

2. Yhdistelmävakuutuksen vakuutuskausi on kolme vuotta. Sopimus tehdään hetkellä 0, jolloin vakuutettu on x-ikäinen. Hetkellä k maksetaan summa S_k, mikäli vakuutettu on tällöin elossa, $k = 1, 2, 3$. Jos vakuutettu kuolee välillä $(k - 1, k]$, maksetaan kuolinhetkellä summa S_k, $k = 1, 2, 3$. Olkoon korkoutuvuus $\delta \geq 0$ vakio ja kuolevuus vakio μ_k ikävälillä $(x + k - 1, x + k]$, $k = 1, 2, 3$. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu.

3. Kertamaksuisessa hetkellä nolla alkavassa vakuutuksessa maksetaan jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Lisäksi hetkellä n maksetaan kertasuoritus S vakuutetun eläessä. Konstruoi sellainen intensiteetti $\bar{S}$, että elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$ on eräs t:stä riippumaton vakio. Suoritus S on kiinnitetty ja kuolevuus μ ja korkoutuvuus δ ovat jatkuvia funktioita. Mikä on syntyvän vakuutuksen nettokertamaksu.

4. Olkoon vakuutetun tilaa kuvaavan Markov-prosessin tila-avaruus $E = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$. Olkoot siirtymäintensiteetit μ_{0j} ja μ_{kN} positiivisia vakioita, $j = 1, 2, \ldots, N$, $k = 1, \ldots, N-1$. Muut siirtymäintensiteetit ovat nollia. Tilojen tulkinnat ovat

$$0 = \text{aktiivi}, \quad j = \text{työkyvytön syystä } j,\ j = 1, \ldots, N - 1, \quad N = \text{kuollut}.$$

Oletetaan, että

$$\mu_{jN} - \mu_{01} - \mu_{02} - \cdots - \mu_{0N} \neq 0, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Vakuutussopimuksen mukaan vakuutetulle maksetaan jatkuvaa eläkettä tilassa j intensiteetillä $\bar{S}_j$, $\forall j \in \{1, \ldots, N - 1\}$. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio. Määrää vakuutuksen nettokertamaksu, kun vakuutettu on sopimuksen tekohetkellä aktiivi.

Tehtävässä voi tarvittaessa käyttää tietoa: $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ silloin ja vain silloin kun

$$y(t) = e^{-A(t)}[\int e^{A(t)}b(t)dt + C],$$

missä A on jokin a:n integraalifunktio ja C mielivaltainen reaalivakio (a ja b ovat jatkuvia funktioita).

Henkivakuutusmatematiikka, 14.12.-16

1. $L = \frac{B(1)}{1+i} + \frac{(1+2i)L}{2(1+i)^2} + \frac{(1+i)L}{2(1+i)^3} \Rightarrow B(1) = iL.$

Lyhennykset ovat $0, L/2, L/2.$

2. Eloonjääneille maksettavien korvausten pnä on

$$\sum_{k=1}^{3} e^{-\delta k} {}_kp_x S_k = \sum_{k=1}^{3} e^{-\delta k - (\mu_1 + \dots + \mu_k)} S_k.$$

Kuolintapausten pnä on

$$\sum_{k=1}^{3} \underbrace{\mathbb{E}\left(e^{-\delta T(x)} 1(T(x) \in (k-1, k]) \right)}_{= \mathbb{E}_k} S_k,$$

$$\mathbb{E}_1 = \int_0^1 e^{-\delta t} {}_tp_x \mu(x+t)\, dt = \mu_1 \int_0^1 e^{-(\delta+\mu_1)t}\, dt = \frac{\mu_1}{\delta+\mu_1}\left(1 - e^{-(\delta+\mu_1)}\right),$$

$$\mathbb{E}_2 = \int_1^2 e^{-\delta t} e^{-(\mu_1+\mu_2(t-1))} \mu_2\, dt = \frac{\mu_2 e^{-(\delta+\mu_1)}}{\delta+\mu_2}\left(1 - e^{-(\delta+\mu_2)}\right)$$

$$\mathbb{E}_3 = \frac{\mu_3 e^{-(2\delta+\mu_1+\mu_2)}}{\delta+\mu_3}\left(1 - e^{-(\delta+\mu_3)}\right)$$

P = nettokertamaksu = $\sum_{k=1}^{3} \left(e^{-\delta k - (\mu_1 + \dots + \mu_k)} + \mathbb{E}_k \right) S_k.$

3.

$$V(t) \approx (1 - \mu(x+t)\Delta)(1 - \delta(t)\Delta)\left(V(t+\Delta) + \bar{S}(t)\Delta\right)$$

$$\approx V(t+\Delta) - (\mu(x+t) + \delta(t))\Delta V(t) + \bar{S}(t)\Delta$$

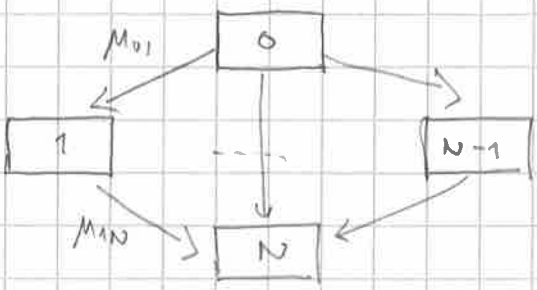
$$\Rightarrow V'(t) = (\mu(x+t) + \delta(t))V(t) - \bar{S}(t).$$

On siis oltava $V(t) = \frac{\bar{S}(t)}{\mu(x+t) + \delta(t)} = C$ = vakio.
Lisäksi $V(n-) = S = V(0+)$ = nettokertamaksu, joten

$$\bar{S}(t) = S(\delta(t) + \mu(x+t)).$$

Suoraan laskemalla nähdään, että tehtävän vaatimukset todella täyttyvät.

4.



Merkitään $P_j(t) = \mathbb{P}(Z(t)=j \mid Z(0)=0)$. Forward-yhtälöt:

$$\begin{cases} dP_0(t) = -(\mu_{01}+\dots+\mu_{0N})\,P_0(t)\,dt \\ dP_j(t) = -\mu_{jN}\,P_j(t)\,dt + \mu_{0j}\,P_0(t)\,dt, \quad j=1,\dots,N-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_0(t) = e^{-(\mu_{01}+\dots+\mu_{0N})t} \\ P_j(t) = \dfrac{\mu_{0j}\,e^{-\mu_{jN}t}}{\mu_{01}+\dots+\mu_{0N}-\mu_{jN}}\left(1-e^{(\mu_{jN}-\mu_{01}-\dots-\mu_{0N})t}\right). \end{cases}$$

Tilassa $j \in \{1,\dots,N-1\}$ kertyvän eläkkeen pna on

$$\bar{S}_j \int_0^\infty e^{-\delta t} P_j(t)\,dt$$

$$= \frac{\bar{S}_j\,\mu_{0j}}{(\delta+\mu_{01}+\dots+\mu_{0N})(\delta+\mu_{jN})}.$$

Nettokertamaksu on näiden summa.