

## Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 8, 23.11.2016

1. Kertamaksuisessa  $x$ -ikäiselle otetussa elämänvaravakuutuksessa korvataan hetkellä  $n$  summa  $S$ , jos vakuutettu on tällöin elossa. Olkoot  $i_1, \dots, i_n$  ja  $\mu$  ensimmäisen ja  $i_1^*, \dots, i_n^*$  ja  $\mu^*$  toisen kertaluvun perusteet, missä  $i_k$  ja  $i_k^*$  ovat  $k$ . vuoden vuosikorkoja ja  $\mu$  ja  $\mu^*$  kuolevuuksia. Olkoon  $V(k)$  elossa olevan vakuutetun vastuuvelka hetkellä  $k$  laskettuna ensimmäisen kertaluvun perusteilla. Kirjoita  $k$ . vuoden satunnaisylijäämä ja tämän toisen kertaluvun perusteilla laskettu odotusarvo hetkellä  $k - 1$  elossa olevalle vakuutetulle,  $k = 1, \dots, n$ . Todista, että viimeksi mainittu on

$$(i_k^* - i_k)V(k - 1) + (q_{x+k-1}^* - q_{x+k-1})V(k).$$

2. (jatkoa) Olkoon

$$Y_n = \sum_{k=1}^n (1 + i_{k+1}^*) \cdots (1 + i_n^*) {}_{k-1}p_x^* y_k$$

kumuloitunut ylijäämä hetken  $n$  mennessä. Olkoon  $P$  ensimmäisen ja  $P^*$  toisen kertaluvun perusteilla määrätty ekvivalenssiperiaatteen mukainen nettokertamaksu. Osoita, että

$$Y_n = (1 + i_1^*) \cdots (1 + i_n^*)(P - P^*).$$

3. Olkoon  $N \geq 2$  kokonaisluku ja  $E = \{1, \dots, N\}$ . Olkoot  $\mu_{jk} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $j, k \in E$ ,  $j \neq k$ , ja  $P_{jk} : [0, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j, k \in E$ , jatkuvia funktioita. Määritellään

$$\mu_{kk}(u) = - \sum_{m \in E, m \neq k} \mu_{km}(u), \quad \forall u \geq 0, k \in E.$$

Oletetaan, että

$$\frac{\partial}{\partial u} P_{jk}(t, u) = \sum_{m \in E} P_{jm}(t, u) \mu_{mk}(u)$$

ja  $P_{jk}(t, t) = \delta_{jk}$ ,  $\forall j, k \in E$ ,  $0 \leq t \leq u$ . Osoita, että  $\sum_{m \in E} P_{jm}(t, u) = 1$ ,  $\forall j \in E$ ,  $0 \leq t < u$ .

4. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että funktiot  $\mu_{jk}$ ,  $j \neq k$ , ovat aidosti positiivisia. Osoita, että voidaan määrätä sellainen  $\Delta > 0$ , että  $P_{jk}(t, u) \in (0, 1)$  kaikilla  $u \in (t, t + \Delta)$  ja  $j, k \in E$ .

5. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että

$$\frac{\partial}{\partial t} P_{jk}(t, u) = - \sum_{m \in E} \mu_{jm}(t) P_{mk}(t, u), \quad \forall j, k \in E, 0 \leq t \leq u.$$

Osoita, että

$$\sum_{m \in E} P_{jm}(t, s) P_{mk}(s, u) = P_{jk}(t, u), \quad \forall 0 \leq t < s < u, \quad j, k \in E.$$