Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 6, 9.11.2016

Ti 1.11. ei ole luentoa.
Ma 7.11. on ylimääräinen luento klo 16-18 salissa C123.

1. Tarkastellaan kertamaksullista vakuutusta, jossa yhtiö alkaa maksaa vakuutetulle heti jatkuvaa eläkettä intensiteetillä $\bar{S}$. Eläkettä maksetaan niin kauan kuin vakuutettu elää, kuitenkin korkeintaan n vuotta. Olkoot korkoutuvuus δ ja kuolevuus μ jatkuvia funktioita ja vakuutettu x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Olkoon $V(t)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$. Osoita derivoimalla esitystä $V(t) = \bar{S}\bar{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$, että $V'(t) = (\delta(t) + \mu(x+t))V(t) - \bar{S}$.

2. (jatkoa) Määrää vakuutuksen nettokertamaksu lähtien edellä saadusta differentiaaliyhtälöstä.

3. Kuolemanvaravakuutuksessa korvauksena maksetaan kuolinhetkellä T summa S, jos $T \in [0, n]$. Vakuutusmaksua maksetaan jatkuvasti koko vakuutuskauden ajan ekvivalenssiperiaatteen mukaisella intensiteetillä $\bar{P}$. Oletetaan, että S ja $\bar{P}$ ovat vakioita. Olkoon kuolevuus μ jatkuva ja aidosti kasvava, korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio ja vakuutettu x-ikäinen.

a) Osoita, että $\bar{P} = S\mu(x + t_0)$ eräälle $t_0 \in (0, n)$.

b) Osoita Thielen yhtälön avulla, että elossa olevan vakuutetun vastuuvelka on ei-negatiivinen koko välillä $[0, n]$.

4. Kuolemanvaravakuutuksessa maksetaan korvaus S_k vuoden k lopussa, jos vakuutettu kuolee vuoden k aikana, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Vakuutettu maksaa vuoden k alussa vakuutusmaksun $P_k \geq 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, mikäli on tällöin elossa. Vakuutettu on x-ikäinen sopimuksen tekohetkellä. Olkoon korkoutuvuus $\delta > 0$ vakio ja kuolevuus μ. Olkoon edelleen V_k elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä k juuri ennen erän P_k maksamista. Todista, että

$$e^{\delta}(V_k + P_k) = q_{x+k}S_k + p_{x+k}V_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

Osoita, että kaava pätee myös kun $k = n - 1$.

5. (jatkoa) Olkoon vakuutettu elossa vuoden k alussa ja $T(x + k)$ jäljellä oleva elinaika. Vuoden k satunnaistulos R_k määritellään ehdosta

$$R_k = P_k - S_k\mathbb{1}(T(x+k) < 1) + V_k - V_{k+1}\mathbb{1}(T(x+k) \geq 1).$$

Osoita, että

$$\mathbb{E}(R_k) = (1 - e^{\delta})(V_k + P_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$