Henkivakuutusmatematiikan laskuharjoitus 5, 2.11.2016

Ti 1.11. ei ole luentoa.
Ma 7.11. on ylimääräinen luento klo 16-18 salissa C123.

1. Yhtiöllä on hetkellä nolla N vakuutusta, joista kustakin korvataan 20 vuoden kuluttua määrä S_{20}, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Korvaus S_{20} on erään arvopaperin hinta hetkellä 20. Oletetaan, että $\mathbb{P}(S_{20} > 0) = 1$ ja että hinta hetkellä nolla on $S_0 = 1$.

Vakuutettujen elinajat ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Iässä x kuolevuus on $\mu(x) = be^{cx}$, missä $b = 0.00005$ ja $c = 0.1$. Vakuutetut ovat kaikki 50-vuotiaita. Kukin vakuutettu maksaa hetkellä nolla kertamaksun $(1+\lambda)_{20}p_{50}S_0$, missä $\lambda > 0$ on varmuuslisä. Oletetaan edelleen, että elinajat ovat riippumattomia mainitun arvopaperin hintakehityksestä.

Yhtiöllä on hallussaan alkupääomaa määrä U_0. Tämä ja saadut vakuutusmaksut sijoitetaan hetkellä nolla korvauksen perustana olevaan arvopaperiin. Hetkellä 20 yhtiö myy arvopapereita korvauksiin tarvittavan määrän. Arvioi keskeisen raja-arvolauseen avulla todennäköisyyttä sille, että yhtiö ei selviä sitoumuksistaan, kun $N = 100$, $\lambda = 0.05$ ja $U_0 = 10$.

2. (jatkoa) Hetkellä 10 havaitaan, että 92 vakuutettua on elossa. Lisäksi todetaan, että käytössä ollut kuolevuus on ylimitoitettu. Tulevia vastuita arvioitaessa käytetään kuolevuuden parametreina arvoja $b = 0.00004$ ja $c = 0.1$. Arvioi hetken 10 tilanteessa keskeisen raja-arvolauseen avulla todennäköisyyttä sille, että yhtiö ei selviä sitoumuksistaan.

3. Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa maksetaan korvaus S vuoden n lopussa, mikäli vakuutettu on tällöin elossa. Vakuutettu maksaa koko kauden ajan vakuutusmaksuja jatkuvasti ekvivalenssiperiaatteen mukaisesti. Olkoon vakuutettu x-ikäinen hetkellä nolla, korkoutuvuus vakio $\delta > 0$ ja maksuintensiteetti $\bar{P}(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$. Olkoon $V(t)$ elossa olevaa vakuutettua koskeva vastuuvelka hetkellä $t \in (0, n)$. Osoita, että

$$V(t) = SD_{x+n}/D_{x+t} - \int_t^n \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+t}du = \int_0^t \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+t}du,$$

missä $D_y = e^{-\int_0^y (\delta+\mu(s))ds}$ alueessa $y \geq 0$.

4. (jatkoa) Tarkastellaan elämänvaravakuutusta, jossa vakuutettu maksaa jatkuvaa vakuutusmaksua haluamallaan intensiteetillä (jota ei päätetä sopimusta tehtäessä). Jos vakuutettu on elossa hetkellä n, suorittaa yhtiö korvauksen $\int_0^n \bar{P}(u)D_{x+u}/D_{x+n}du$, missä $\bar{P}(u), u \in (0, n)$, on toteutunut intensiteetti, jolla vakuutusmaksuja on maksettu. Tee perusteltu ehdotus elossa olevaa vakuutettua koskevaksi vastuuvelaksi hetkellä $t \in (0, n)$.

5. Elämänvaravakuutuksen korvaussumma on S, vakuutuskauden pituus n ja vakuutettu on x-ikäinen hetkellä 0. Vakuutus maksetaan hetkellä 0 ekvivalenssiperiaatteen mukaisella kertamaksulla P. Kuolevuus μ ja korkoutuvuus ovat jatkuvia funktioita. Määrää elossa olevan vakuutetun prospektiivinen vastuuvelka $V(t)$ hetkellä $t \in (0, n)$ ja osoita, että

$$V(t) = e^{\int_0^t (\delta(s)+\mu(x+s))ds}P.$$