HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 7 – Modellsvar

A1. Bestäm
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+3}$$
med hjälp av kursens kunskaper. I uppgiften får man använda kunskap om gränsvärdet för konstanta talföljder och följden $(\frac{1}{n})$, samt satser som berör gränsvärden för talföljder. Motivera ditt svar noggrant!

Lösning: Vi börjar med att formulera om den undersökta talföljden till en användbarare form
$$\frac{n^2+2}{2n^2+3} = \frac{n^2(1+\frac{2}{n^2})}{n^2(2+\frac{3}{n^2})} = \frac{1+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}.$$
Vi får använda kunskapen om att $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ och $\lim_{n\to\infty} a = a$, då a är något reellt tal. Nu gäller enligt bokens sats 2.2.8 och de tidigare resultaten att följande gränsvärden existerar:
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right) = 0\cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 2\cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(3\cdot\frac{1}{n^2}\right) = 3\cdot 0 = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right) = 1+0 = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right) = 2+0 = 2,$$
Nu eftersom
$$2+\frac{3}{n^2} \neq 0 \text{ och } 2 \neq 0,$$
för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3\ldots$, så kan vi fortfarande tillämpa sats 2.2.8 så vi får att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

A2. Visa på basen av definitionen för att en talföljd går mot $+\infty$ att
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{3n+1} = \infty.$$

Lösning: Vi vill visa att det för alla reella tal M existerar ett sådant naturligt tal k att det för alla $n > k$ gäller
$$\frac{n^2+2}{3n+1} > M.$$
Vi börjar därmed med att förminska uttrycket.
$$\frac{n^2+2}{3n+1} \geq \frac{n^2+2}{3n+n} = \frac{n^2+2}{4n} \geq \frac{n^2}{4n} = \frac{n}{4}.$$

Vi vill att $\frac{n}{4} > M$. Vi märker ekvivalensen

$$\frac{n}{4} > M \quad \Longleftrightarrow \quad n > 4M.$$

Alltså väljer vi talet k vara sådant att det gäller $k > 4M$.

Bevis:

Låt $M \in \mathbb{R}$. Vi väljer $k > 4M$, där $k \in \mathbb{N}$. Nu gäller för alla $n > k$ att

$$\frac{n^2+2}{3n+1} \geq \frac{n}{4} > \frac{k}{4} > \frac{4M}{4} = M.$$

A3. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x+3} = \frac{4}{5}.$$

Lösning: Vi vill visa att det för alla $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$ så att det för alla $0 < |x-2| < \delta$ gäller att

$$\left| \frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5} \right| < \varepsilon.$$

Vi förlänger först bråkuttrycken innanför absolutbeloppet så de har samma nämnare:

$$\left| \frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5} \right| = \left| \frac{5(x+2)-4(x+3)}{5(x+3)} \right| = \left| \frac{5x+10-4x-12}{5x+15} \right| = \left| \frac{x-2}{5x+15} \right| = \frac{|x-2|}{|5x+15|}.$$

Dessutom delades absolutbeloppet skilt till täljaren och nämnaren. Funktionens beteende vid den undersökta punkten (i detta fall $x = 2$) har för gränsvärdets del betydelse endast i närheten av nämnda punkt, eftersom vi nu funderar på att om x närmar sig talet 2, så kommer isåfall $\frac{x+2}{x+3}$ att närma sig $\frac{4}{5}$. Vi kan alltså begränsa oss till att betrakta endast omgivningen av talet 2. Det lönar sig nu att begränsa variabeln x så den är högst på avståndet 1 från talet 2.

Vi gör alltså ett tilläggsantagande, att $|x-2| < 1$, vilket är ekvivalent med $1 < x < 3$. Nu är x positiv, så vi kan ta bort absolutbeloppstecknen från nämnaren och uttrycket kan uppskattas vidare uppåt:

$$\frac{|x-2|}{|5x+15|} = \frac{|x-2|}{5x+15} \leq \frac{|x-2|}{15}.$$

Om vi får detta att vara mindre än ε, så är också det ursprungliga uttrycket mindre än det, så vi betraktar olikheten $\frac{|x-2|}{15} < \varepsilon$. Detta får vi genom att ledvis multiplicera med talet 15 till formen $|x-2| < 15\varepsilon$. Nu vill vi alltså att detta ska gälla då $0 < |x-2| < \delta$. Talet δ ska därmed väljas vara sådant att $\delta \leq 15\varepsilon$.

Vi gjorde tidigare ett tilläggsantagande, att $|x-2| < 1$. Därmed måste vi välja talet δ så att det fortfarande gäller $\delta \leq 1$. Alltså väljer vi ett sådant δ att båda kraven uppfylls.

Todistus:

Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \min\{15\varepsilon, 1\}$, för vilket det gäller $0 < |x-2| < \delta$. Nu följer att

$$\left| \frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{5} \right| \leq \frac{|x-2|}{15} < \frac{\delta}{15} \leq \frac{15\varepsilon}{15} = \varepsilon$$

A4. Man betraktar talföljden (x_n), där $x_1 = 2$ och för alla $n = 1, 2, \ldots$ gäller att

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1).$$

(a) Visa att följden är avtagande och att 1 är en undre gräns till talen. (Det lönar sig att notera att $\sqrt{a} < a$ då $1 < a$.)

(b) Visa att följden konvergerar och bestäm dess gränsvärde.

Lösning:
(a) Vi visar till först med induktion att elementen i talföljden (x_n) är alltid större eller lika med talet 1 för alla $n \in \mathbb{N}$.

Bassteg: påståendet gäller då $n = 1$, eftersom $x_1 = 2 \geq 1$.

Induktionssteg: vi antar att påståendet gäller för något $k \in \mathbb{N}$, alltså $x_k \geq 1$. Därmed gäller påståendet även då $n = k+1$: $x_{k+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_k} + 1) \geq \frac{1}{2}(\sqrt{1} + 1) = 1$.

Talföljden (x_n) är alltså alltid större än 1, alltså är den nerifrån begränsad och dess undre gräns är 1.

Till näst visar vi att talföljden är är avtagande. Detta kan bevisas genom att visa att för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller $x_n - x_{n+1} \geq 0$.

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) = \frac{2x_n - (\sqrt{x_n} + 1}{2}).$$

Vi vet att $\sqrt{a} \leq a$ för alla $a \geq 1$. Då kan vi uppskatta uttrycket ovan

$$\frac{2x_n - (\sqrt{x_n} + 1)}{2} \geq \frac{2\sqrt{x_n} - \sqrt{x_n} - 1}{2} = \frac{\sqrt{x_n} - 1}{2}.$$

Eftersom $x_n \geq 1$, så $\sqrt{x_n} \geq 1$. Således gäller $\frac{\sqrt{x_n} - 1}{2} \geq 0$.
Därmed har vi visat att x_n är nerifrån begränsad och avtagande.
(b) Vi gör till först några anmärkningar:

i) Enligt a-delen vet vi att talföljden (x_n) är nerifrån begränsad och avtagande, så enligt sats 2.3.9 gäller att den konvergerar. Därmed följer att $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, där a är något reellt tal.

ii) Enligt tidigare kunskaper från kursen vet vi också att

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

iii) Enligt sats 2.2.8 och tidigare kunskaper från kursen gäller

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) \to \frac{1}{2}(\sqrt{a} + 1)$$

iv) Likastorheten behålls vid gränsvärdet, alltså

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} + 1)$$

Vi får alltså det sökta gränsvärdet med att lösa följande ekvation

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{a} + 1) \quad \Longrightarrow \quad 2a = \sqrt{a} + 1 \quad \Longrightarrow \quad 2a - 1 = \sqrt{a}$$
$$\Longrightarrow \quad (2a-1)^2 = a \quad \Longrightarrow \quad 4a^2 - 5a + 1 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad (4a-1)(a-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1 \quad \text{tai} \quad a = \frac{1}{4}$$

Värdet $a = \frac{1}{4}$ kan förkastas, eftersom vi tidigare visade att $x_n \geq 1$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Alltså $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

A5. Visa på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet att den funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som definieras av ekvationen

$$f(x) = x^2 + 3x + 4$$

är kontinuerlig i punkten $x = 1$. (Kom ihåg att kontinuitet betyder att funktionens värde i punkten är samma som motsvarande gränsvärde.)

Lösning:

Vi vill alltså visa att $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Då gäller det visa att det för alla $\varepsilon > 0$ existerar ett sådant $\delta > 0$, att det för alla $|x-1| < \delta$ gäller

$$|f(x) - f(1)| < \varepsilon.$$

Vi börjar med att betrakta differensen inom absolutbeloppet

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &= |x^2 + 3x + 4 - (1^2 + 3 \cdot 1 + 4)| \\
&= |x^2 + 3x + 4 - 8| \\
&= |x^2 + 3x - 4| \\
&= |(x+4)(x-1)| \\
&= |x+4||x-1|
\end{aligned}$$

Funktionens beteende vid den undersökta punkten (i detta fall $x = 1$) har för gränsvärdets del betydelse endast i närheten av nämnda punkt, eftersom vi nu funderar på att om x närmar sig talet 1, så kommer isåfall $f(x)$ att närma sig $f(1)$. Vi kan alltså begränsa oss till att betrakta endast omgivningen av talet 1. Det lönar sig nu att begränsa variabeln x så den är högst på avståndet 1 från talet 1.

Vi gör alltså ett tilläggsantagande, att $|x-1| < 1$, vilket är ekvivalent med $0 < x < 2$. Nu är x positiv, så vi kan ta bort absolutbeloppstecknen från den andra faktorn och uttrycket kan uppskattas vidare uppåt:

$$|x+4||x-1| = (x+4)|x-1| \leq (2+4)|x-1| = 6|x-1|$$

Om vi får detta att vara mindre än ε, så är också det ursprungliga uttrycket mindre än det, så vi betraktar olikheten $6|x-1| < \varepsilon$, vilket är ekvivalent med $|x-1| < \frac{\varepsilon}{6}$. Nu vill vi alltså att detta ska gälla då $0 < |x-2| < \delta$. Talet δ ska därmed väljas vara sådant att $\delta \leq \frac{\varepsilon}{6}$.

Vi gjorde tidigare ett tilläggsantagande, att $|x-1| < 1$. Därmed måste vi välja talet δ så att det fortfarande gäller $\delta \leq 1$. Alltså väljer vi ett sådant δ att båda kraven uppfylls.

Bevis:

Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\}$. Låt dessutom $0 < |x-1| < \delta$. Nu följer det att

$$|f(x) - f(1)| = |x^2 + 3x - 4| = (x+4)|x-1| \leq 6|x-1| < 6 \cdot \delta \leq 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon.$$