HU / Institutionen för Matematik och Statistik
Gränsvärden, hösten 2016
Övning 6 – Modellsvar

L1. Anta att A och B är icke-tomma uppåt begränsade mängder av reella tal. Beteckna $a = \sup A$ och $b = \sup B$. Visa att

$$a + b = \sup\{x + y \mid x \in A \text{ och } y \in B\}.$$

Lösning:

Vi betecknar uppgiftens mängd med C, vars supremum vi vill undersöka, dvs $C = \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$. Vi vill alltså visa att $a + b = \sup C$.

Mängderna A och B är icke-tomma och uppifrån begränsade, alltså är mängden C icke-tom och uppifrån begränsad. Alltså existerar $\sup C$. Enligt definitionen för supremum gäller för alla $x \in A$ att $x \leq \sup A = a$ och för alla $y \in B$ gäller $y \leq \sup B = b$. Således gäller för summan $x + y$ att

$$x + y \leq \sup A + \sup B = a + b,$$

alltså är $a + b$ någon övre gräns för mängden C. Enligt definitionen för supremum är $a + b$ supremumet av mängden C om $a + b$ också är den minsta övre gränsen.

Vi antar att $c = \sup C = a + b - h$ för något $h > 0$. Vi väljer $x_h \in A$ och $y_h \in B$ så att $x_h > a - \frac{h}{2}$ och $y_h > b - \frac{h}{2}$. Nu gäller $x_h + y_h \in C$ och

$$x_h + y_h > a - \frac{h}{2} + b - \frac{h}{2} = a + b - h = c,$$

och därmed kan inget mindre tal än $a + b$ vara en övre gräns för mängden C, alltså kan antagandet $\sup C = a + b - h$ inte stämma. Från detta och från att vi vet att $a + b$ är en övre gräns för C, så följer det att $\sup C = a + b$.

L2. Vi betraktar talföljden (x_n). Anta att det för varje $n \in \mathbb{N}_1$ gäller att $x_n > 0$. Visa noggrant att följande villkor är ekvivalenta.

(a) $x_n \to 0$ då $n \to \infty$.

(b) $\frac{1}{x_n} \to \infty$ då $n \to \infty$.

Lösning:

(1) *Vi antar till först att a-delen gäller och visar att då gäller även b-delen:*

Tankar inför beviset: Vi vill alltså bevisa att $\frac{1}{x_n} \to \infty$, då $n \to \infty$. Detta betyder enligt definitionen att det för varje reellt tal M existerar ett positivt heltal K, för vilket $\frac{1}{x_n} > M$, då $n > K$. Vi antar alltså att M är något reellt tal och visar att det positiva heltalet K vi söker efter faktiskt existerar.

Nu antar vi alltså att a-delen gäller, alltså att $x_n \to 0$, då $n \to \infty$. Enligt definitionen för gränsvärdets definition betyder detta att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett positivt heltal K, för vilket

$$|x_n - 0| < \varepsilon, \text{ då } n > K.$$

Vi undersöker nu olikheten $|x_n - 0| < \varepsilon$ som ligger i kärnan av definitionen. Ekvivalent gäller $|x_n| < \varepsilon$ och eftersom det i uppgiften givits att $x_n > 0$ för alla $n \in \mathbb{N}_1$, så kan absolutbeloppstecknen lämnas bort eftersom absolutbeloppet av ett positivt tal är talet självt, alltså $x_n < \varepsilon$.

Nu eftersom $x_n > 0$ och $\varepsilon > 0$, så kan olikheten $x_n < \varepsilon$ delas ledvis med talen x_n och ε, medan olikhetens riktning hålls samma. Då får vi att

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{x_n} \quad \text{alltså} \quad \frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Detta är redan väldigt nära olikheten $\frac{1}{x_n} > M$ som vi letar efter. Nu då vi väljer

$$\varepsilon = \frac{1}{\max\{M,1\}},$$

så gäller enligt föregående olikhet för ε och gränsvärdets definition att det existerar ett positivt heltal K, för vilket

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\max\{M,1\}}} = \max\{M,1\} \geq M, \text{ då } n > K.$$

Alltså finns det ett positivt heltal K, för vilket $\frac{1}{x_n} > M$, då $n > K$, och detta är vad vi ville visa. (Märk att vi inte kunde helt enkelt bara välja $\varepsilon = \frac{1}{M}$, eftersom M kan vara negativ eller noll, och enligt gränsvärdes definition måste talet ε alltid vara positivt.)

Bevis: Låt M vara något reellt tal. Vi väljer som talet K ett sådant positivt heltal, för vilket gäller $|x_n - 0| < \frac{1}{\max\{M,1\}}$, då $n > K$. Vi antar att $n > K$. Enligt tankegången ovan gäller nu $\frac{1}{x_n} > M$. Alltså $\frac{1}{x_n} \to \infty$, då $n \to \infty$.

(2) *Till näst antar vi att b-delen gäller och visar att då gäller även a-delen:*

Tankar inför beviset: Vi vill alltså visa att $x_n \to 0$, då $n \to \infty$. Detta betyder enligt definitionen för talföljdens gränsvärde att det för varje $\varepsilon > 0$ finns ett sådant positivt heltal K, för vilket $|x_n - 0| < \varepsilon$, då $n > K$. Vi antar alltså att $\varepsilon > 0$ är något tal och visar att ett passligt K existerar.

Nu antar vi alltså att b-delen gäller, alltså att $\frac{1}{x_n} \to \infty$, då $n \to \infty$. Enligt definitionen betyder detta att det för varje reellt tal M existerar ett positivt tal K, för vilket

$$\frac{1}{x_n} > M, \text{ då } n > K.$$

Å andra sidan visade vi i första delen att olikheten $|x_n - 0| < \varepsilon$ som vi ska visa är ekvivalent med olikheten $\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}$ och detta påminner mycket om den förra meningens olikhet $\frac{1}{x_n} > M$.

Nu då vi väljer $M = \frac{1}{\varepsilon}$, så följer från våra antaganden att det existerar ett positivt tal K, för vilket

$$\frac{1}{x_n} > M = \frac{1}{\varepsilon}, \text{ då } n > K.$$

Alltså existerar det med andra ord ett positivt tal K, för vilket

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ då } n > K.$$

I första delen visades detta vara ekvivalent med det att det finns ett positivt heltal K, för vilket $|x_n - 0| < \varepsilon$, då $n > K$, och detta är vad vi ville visa.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Vi väljer som talet K ett sådant positivt heltal, för vilket gäller $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$, då $n > K$. Vi antar att $n > K$. Enligt tankegången ovan gäller nu $|x_n - 0| < \varepsilon$. Alltså gäller enligt definitionen av gränsvärdet att $x_n \to 0$, då $n \to \infty$.

Nu har vi alltså visat att det från a-kravet följer b-kravet och vice versa. Detta betyder att a- och b-kravena är ekvivalenta.

L3. Visa på basen av definitionen av gränsvärdet för en funktion att

$$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$$

då $x \to 1$.

Lösning:

Tankar inför beviset: Enligt definitionen för en funktions gränsvärde betyder "$\frac{x+3}{x+5} \to \frac{2}{3}$, kun $x \to 1$" samma sak som att "för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett sådant $\delta > 0$, för vilket $|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}| < \varepsilon$, då $0 < |x-1| < \delta$". Vi antar alltså till först att $\varepsilon > 0$ är något tal och söker ett lämpligt $\delta > 0$, för vilket definitionens krav uppfylls.

Vi börjar med att betrakta den vänstra sidan $|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}|$ av olikheten i kärnan av definitionen, som vi alltså vill visa vara mindre än ε. Vi förlänger först bråkuttrycken inom absolutbeloppen till att ha samma nämnare, så att vi på samma vis som med talföljdernas gränsvärden har kvar endast ett uttryck inom absolutbeloppet:

$$\left|\frac{x+3}{x+5} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(x+3)}{3(x+5)} - \frac{2(x+5)}{3(x+5)}\right| = \left|\frac{3x+9}{3(x+5)} - \frac{2x+10}{3(x+5)}\right| = \left|\frac{3x+9-2x-10}{3(x+5)}\right|$$
$$= \left|\frac{x-1}{3(x+5)}\right| = \frac{|x-1|}{|3(x+5)|} = \frac{|x-1|}{|3||x+5|} = \frac{|x-1|}{3|x+5|} = \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|}.$$

Dessutom delades absolutbeloppet skilt till täljaren och nämnaren, vilket enligt absolutbeloppets räkneregler är tillåtet, och $\frac{1}{3}$ togs framför som koefficient.

Funktionens beteende har för gränsvärdet betydelse endast i närheten av den betraktade punkten (i detta fall $x = 1$), eftersom det nu funderas över att, då x *närmar sig* talet 1, så närmar sig $\frac{x+3}{x+5}$ då talet $\frac{2}{3}$. Alltså kan vi begränsa oss till att unndersöka talen i näreten av talet 1. Vi har nytta av detta då vi vill uppskatta uttrycket $\frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|}$ vidare uppåt. Variabeln x lönar sig nu att begränsa till att vara högst på avståndet 1 av talet 1, så vi kan försäkra oss om att den är positiv, vilket ger att vi kan lämna bort absolutbeloppstecknen från nämnaren och uttrycket kan då vidare uppskattas uppåt:

$$\frac{1}{3}\frac{|x-1|}{|x+5|} = \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{x+5} < \frac{1}{3}\frac{|x-1|}{5} = \frac{1}{15}|x-1|.$$

Om detta fås att vara mindre än ε, så är också ursprungliga uttrycket mindre än det, alltså undersöker vi olikheten $\frac{1}{15}|x-1| < \varepsilon$. Detta fås genom att multiplicera ledvis med talet 15 till formen $|x-1| < 15\varepsilon$. Nu vill vi alltså att detta gäller då $0 < |x-1| < \delta$. Talet δ ska alltså väljas till sådant att $\delta \leq 15\varepsilon$ gäller för det.

Tidigare nämndes att vi vill begränsa variabeln x till att vara högst på avståndet 1 från talet 1. I praktiken görs detta genom att välja värdet för talet δ på det visat att $\delta \leq 1$ gäller för det. Således får vi enligt gränsvärdets definition, som nämndes i början, att

$$|x-1| < \delta \leq 1,$$

vilket ger $|x-1|<1$ alltså $x>0$. Vi väljer nu alltså $\delta=\min\{15\varepsilon,1\}$. På detta vis har vi försäkrat oss om att $\delta\le 1$ och $\delta\le 15\varepsilon$.

Bevis: Låt $\varepsilon>0$. Välj $\delta=\min\{15\varepsilon,1\}$ och anta att $0<|x-1|<\delta$. Enligt tankegången tidigare gäller nu

$$\left|\frac{x+3}{x+5}-\frac{2}{3}\right|<\frac{1}{15}|x-1|<\frac{1}{15}\delta\le\frac{1}{15}\cdot 15\varepsilon=\varepsilon.$$

Alltså gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde att $\frac{x+3}{x+5}\to\frac{2}{3}$, då $x\to 1$.

L4. Visa på basen av definitionerna av gränsvärdet och kontinuitet för funktioner att den funktion $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som definieras av villkoret $f(x)=|x|$ är kontinuerlig i varje punkt $x_0\in\mathbb{R}$. Betrakta fallen $x_0<0$, $x_0=0$ och $x_0>0$ separat. (Alternativt, kom ihåg triangelolikheten nedåt.)

Lösning:

(1) *Fallet $x_0>0$:*

Tankar inför beviset: Enligt definitionen av kontinuitet är funktionen f kontinuerlig i punkten x_0 om $f(x)\to f(x_0)$ då $x\to x_0$, alltså att funktionen närmar sig sitt eget värde vid nämnda ställe. Nu är den betraktade funktionen $f(x)=|x|$, alltså genom att använda gränsvärdets definition betyder denna funktions kontinuitet att det för varje $\varepsilon>0$ existerar ett $\delta>0$, för vilket $\big||x|-|x_0|\big|<\varepsilon$, då $0<|x-x_0|<\delta$. Vi antar alltså att $\varepsilon>0$ är något tal och söker ett lämpligt $\delta>0$, som uppfyller kravet. Vi betraktar den vänstra sidan $\big||x|-|x_0|\big|$ i definitionens ε-olikhet. Nu bevisar vi fallet $x_0>0$, alltså får vi uttrycket i formen $\big||x|-x_0\big|$. Dessutom kan variabeln x begränsas på samma vis som i förra uppgiften att vara i närheten av talet x_0, så vi får att $x>0$. I praktiken görs detta genom att som i förra uppgiften välja δ, så det gäller att $\delta\le x_0$. Nu får vi alltså förenklat det betraktade uttrycket:

$$\big||x|-x_0\big|=|x-x_0|.$$

Vi ville alltså söka ett sådant $\delta>0$, för vilket uttrycket $|x-x_0|<\varepsilon$ ovan gäller, då $|x-x_0|<\delta$. Talet δ ska alltså väljas så att det gäller $\delta\le\varepsilon$. Dessutom ville vi att $\delta\le x_0$, alltså väljer vi $\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}$. Nu har det sökta δ hittats och fallet $x_0>0$ har blivit bevisat.

Bevis: Låt $\varepsilon>0$. Välj $\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}$ och anta att $0<|x-x_0|<\delta$. Enligt tidigare tankegång gäller att

$$\big||x|-|x_0|\big|=|x-x_0|<\delta=\min\{\varepsilon,x_0\}\le\varepsilon.$$

Alltså gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde att $|x|\to|x_0|$, då $x\to x_0$, alltså är funktionen kontinuerlig vid punkten x_0.

(2) *Fallet $x_0=0$:*

Tankar inför beviset: Vi betraktar som i det tidigare fallet den vänstra sidan $\big||x|-|x_0|\big|$ av gränsvärdets definitions ε-olikhet. Nu visar vi fallet $x_0=0$, alltså fås uttrycket i formen

$$\big||x|-0\big|=\big||x|\big|=|x|=|x-0|=|x-x_0|.$$

För detta vill vi än en gång hitta ett $\delta > 0$, för vilket $|x - x_0| < \varepsilon$, då $|x - x_0| < \delta$. Nu kan vi alltså välja $\delta = \varepsilon$. Denna gången behövde vi inte begränsa variabeln x, så detta räcker för att visa fallet.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \varepsilon$ och anta att $0 < |x - x_0| < \delta$. Enligt tidigare tankegång gäller nu att
$$\Big||x| - |x_0|\Big| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon.$$
Alltså gäller enligt definitionen av en funktions gränsvärde att $|x| \to |x_0|$, då $x \to x_0$, alltså är funktionen kontinuerlig i punkten x_0.

(3) *Fallet* $x_0 < 0$*:*

Tankar inför beviset: Vi betraktar som i de tidigare fallen den vänstra sidan $\Big||x| - |x_0|\Big|$ av gränsvärdets definitions ε-olikhet. Nu visar vi fallet $x_0 < 0$ alltså fås uttrycket i formen
$$\Big||x| - (-x_0)\Big| = \Big||x| + x_0\Big|.$$
Dessutom kan variabeln x begränsas på samma vis som tidigare till att vara i närheten av talet x_0, så vi får att $x < 0$ (*mindre* än 0 denna gång, eftersom $x_0 < 0$). I praktiken görs detta genom att välja ett δ, för vilket gäller $\delta \leq |x_0|$. På detta vis kan vi förenkla det betraktade uttrycket vidare:
$$\Big||x| + x_0\Big| = |-x + x_0| = |-(x - x_0)| = |x - x_0|.$$
Vi ville alltså hitta ett $\delta > 0$, för vilket uttrycket $|x - x_0| < \varepsilon$ ovan gäller, då $|x - x_0| < \delta$. Talet δ ska alltså väljas vara sådant att det gäller $\delta \leq \varepsilon$. Dessutom ville vi att $\delta \leq |x_0|$, alltså väljer vi $\delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\}$. Nu har vi hittat ett lämpligt δ och det sista fallet $x_0 < 0$ är bevisat.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\}$ och anta att $0 < |x - x_0| < \delta$. Enligt tidigare tankegång gäller nu att
$$\Big||x| - |x_0|\Big| = |x - x_0| < \delta = \min\{\varepsilon, |x_0|\} \leq \varepsilon.$$
Alltså gäller enligt definitionen av en funktions gränsvärde att $|x| \to |x_0|$, då $x \to x_0$, alltså är funktionen kontinuerlig i punkten x_0.

L5. Anta att funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfierar för varje $x \in \mathbb{R}$ villkoret $|g(x)| \leq 3$. Definiera funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med villkoret $f(x) = x^2 g(x)$. Visa på basen av definitionerna av gränsvärdet och derivatan för funktioner att funktionen f är deriverbar i punkten $x_0 = 0$.

Lösning:

Tankar inför beviset: Enligt derivatans definition är funktionen f deriverbar i punkten x_0 och dess derivata är det reella talet A, om
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to A,$$
då $x \to x_0$. Nu är den betraktade funktionen alltså $f(x) = x^2 g(x)$. Så att derivatans existens, alltså deriverbarhet kan betraktas enligt definitionen, så måste vi hitta på vad derivatans värde A är. Ofta kan detta inte vetas i förväg, utan man måste prova

olika värden tills man hittar det rätta. I detta fall skulle en bra gissning vara om derivatans värde A i punkten 0 vore 0, eftersom funktionen f har som koefficient x^2,vars derivata i punkten 0 är 0. Vi provar alltså om vi skulle få derivatans definition att uppfyllas då $A = 0$.

Genom att använda definitionen för en funktions gränsvärde på derivatan, får vi: för varje $\varepsilon > 0$ existerar ett $\delta > 0$, för vilket

$$\left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| < \varepsilon,$$

då $0 < |x - 0| < \delta$. Vi antar alltså att $\varepsilon > 0$ är något tal och söker ett lämpligt $\delta > 0$, som uppfyler kravet.

Vi betraktar den vänstra sidan i definitionens ε-olikhet.:

$$\left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x)}{x}\right| = |xg(x)| = |x||g(x)| \leq |x| \cdot 3.$$

I sista skedet har vi använt oss av uppgiftens antagande: $|g(x)| \leq 3$ för varje $x \in \mathbb{R}$.

Vi ville alltså hitta $\delta > 0$, så det för $|x| \cdot 3$ ovan gäller att $|x| \cdot 3 < \varepsilon$, då $|x - 0| < \delta$ alltså då $|x| < \delta$. Nu kan vi alltså välja $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. Det sökta δ har alltså hittats och enligt gränsvärdets definition har vi visat att vårt påstående gäller. Funktionen f är alltså deriverbar i punkten $x = 0$, vilket är det vi ville visa. Dessutom visade sig dess derivata slutligen faktiskt vara $A = 0$.

Bevis: Låt $\varepsilon > 0$. Välj $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ och anta att $0 < |x - 0| < \delta$. Enligt tidigare tankegång gäller det nu att

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 g(x) - 0^2 g(0)}{x - 0} - 0\right| \leq 3|x| = 3|x - 0| < 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Alltså gäller enligt definitionen för en funktions gränsvärde att

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \to 0, \text{ då } x \to 0,$$

alltså är funktionen f deriverbar i punkten 0och dess derivata är 0 där.